
RCESR Discussion Paper Series

Non-homothetic CES 型効用関数を用いた 日本のエンゲル係数の分析

2026 年 6 月

外木暁幸
東洋大学経済学部

RCESR

一橋大学 経済研究所
経済社会リスク研究機構

〒186-8603 東京都国立市中 2-1
<http://risk.ier.hit-u.ac.jp/>

Non-homothetic CES 型効用関数を用いた 日本のエンゲル係数の分析*

外木暁幸†

2026年6月

概要

近年の日本において、生活水準の古典的な指標であるエンゲル係数が急激な上昇傾向を示している。本稿は、この現象を食料品の「相対価格の上昇（価格効果）」と「実質所得の低下（所得効果）」の2つの要因に厳密に分解し、定量的に解明することを目的とする。分析の枠組みとして、マクロ経済学の構造転換論で近年注目を集める Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを導入し、日本の都道府県別・10大分類パネルデータ（2014年–2024年）に適用した。価格比の内生性を排除するため、他都道府県の平均価格を用いた空間的 Hausman 型操作変数法 (IV) による 2SLS 推定を実施し、マクロ整合的規格化（需要の所得弾力性の財間の加重平均値は1）を通じて効用関数の単調性を満たす構造パラメーターを識別した。

推定の結果、本研究は2つの発見を得た。第一に、日本の家計の需要システムは明確に非相似拡大的であり、すべての財の所得弾力性を1に制約するホモセティック CES の仮定は棄却された。地方ブロック固定効果による主推定では、結合 Wald 検定が非ホモセティシティを強く支持し、wild クラスタ・ブートストラップによる区間推定でも教育・被服・教養娯楽が有意な奢侈財、食料・家具が有意な必需財として識別された。復元された所得弾力性から、教育を最も強い奢侈財、食料・光熱水道を必需財とする経済的に整合的な序列を示した。第二に、反実仮想シミュレーションによる2015年から2024年のエンゲル係数上昇の要因分解では、その主因は食料品の相対価格高騰（価格効果、モデル総効果の約7割）であり、家計の代替の困難さ（粗補完性）がエンゲル係数を押し上げていた。非相似拡大的な所得効果も食料シェアを同方向に動かすが、その寄与率は穏当（13.5%）で、世帯構成の変化（同16.6%）と同程度であった。すなわち、日本の需要構造は確かに非相似拡大的だが、近年のエンゲル係数上昇という時系列現象そのものは主として相対価格主導である。所得効果を構造的に表現できないホモセティック CES は、この非相似拡大的構造を

* 本研究は、科学研究費 (23K25496) の成果物である。

† 東洋大学経済学部, E-mail: tonogi@toyo.jp

捉えられない点が弱みであるが、当該期間のトレンドに限ればその主因は価格効果にあった。

さらに、厚生計測上の含意を見ると、両モデルとも効用水準は当該期間に約 5% 低下した。両モデルの生計費は平穏な年には近接するが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には NH-CES の生計費が CES を上回る。NH-CES による COLI は Törnqvist 価格指数をよく近似する一方、CES はこれを下回っており、ホモセティック CES がインフレ局面の生計費を過小評価することが示された。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数分解が価格主導であったことは別の分析マージンに属し、両者は矛盾しない。

本稿の発見は、家計が直面する相対価格の歪みと、必需品偏重を強める実質購買力の低下の双方に配慮したマクロ経済政策の必要性を示唆する。

1 はじめに

国民の生活水準を測定する古典的かつ強力な指標の一つに、家計の総支出に占める食料品支出の割合を示す「エンゲル係数 (Engel Coefficient)」がある。19 世紀の統計学者エルンスト・エンゲル (Ernst Engel) が発見したこの経験則は、一般に家計が豊かになるほどエンゲル係数は低下し、逆に貧しくなるほど上昇するという、所得と消費構造の間の負の関係を示唆している。エンゲルの発見から約一世紀を経た Houthakker (1957) の国際比較研究はこの経験則を広く実証し、現代の需要分析の礎石とした。

しかし、近年の日本経済においては、このエンゲルの法則が逆の形で、かつ生々しく発現しているように見受けられる。デフレからの脱却と持続的な物価上昇を目指す政策運営が行われる一方で、原材料価格の高騰や為替レート的大幅な減価 (円安) といった外部ショックは、家計が直面する物価を押し上げ、実質購買力の低下をもたらしている。

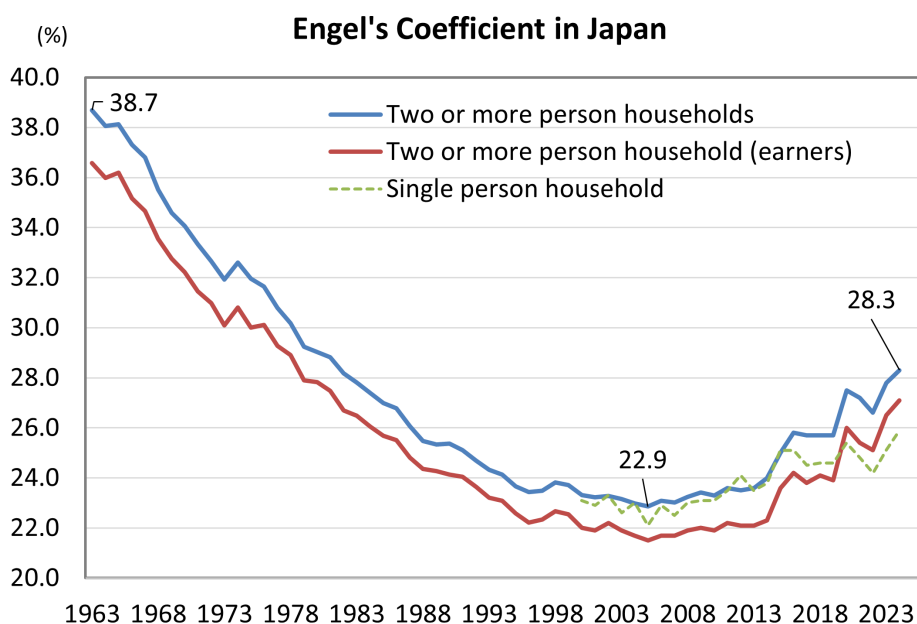


図1 日本のエンゲル係数の長期推移 (総務省『家計調査』, 全国): 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・単身世帯

図1は、日本のエンゲル係数 (消費支出に占める食料支出の割合) の長期的な推移を、総務省『家計調査』 (全国) の三つの世帯区分—二人以上の世帯、二人以上の世帯のうち勤労者世帯、単身世帯 (2000 年以降) —について示したものである。二人以上の世帯で

は、高度経済成長期以降の所得水準の上昇を背景に、エンゲルの法則が予測するとおりエンゲル係数が長期にわたって低下を続け、1963年の38.7%から2000年代半ばの22.9%まで、約40年間で約16ポイント低下した。ところが2000年代後半を境にこの低下トレンドは反転し、三つの世帯区分そろってエンゲル係数は上昇に転じている。二人以上の世帯では底値から5ポイント以上回復し、2024年には28.3%に達した。所得の上昇に伴って単調に低下するという古典的なエンゲルの法則の含意に反するこの近年の反転上昇は、それ自体が説明を要する現象である。

このエンゲル係数の急激な上昇という現象は、いかなる経済学的メカニズムによって引き起こされているのか。これを解明するためには、家計の需要配分を決定する「価格効果」と「所得効果」の2つのチャンネルを分離して検証する必要がある。第一の仮説は、「相対価格効果」である。近年の食料品価格の相対的な高騰に対し、食料という生存に不可欠な財の代替が困難であるため（代替の弾力性が1より小さいため）、シェアが膨張したという考え方である。第二の仮説は、「非相似拡大的な所得効果」である。実質所得の低下局面において、食料が必需品特性を持つため（食料品の所得弾力性が1より小さいため）に、その支出シェアが内生的に膨張したという考え方である。

ホモセティックな（相似拡大的な）CES型効用関数を用いた需要システムの研究では選好の相似拡大性を仮定するため、後者の所得効果による需要構造の変化を数学的に無視せざるを得ない。結果として、エンゲル係数の変動のすべてを価格効果（代替弾力性）のみに帰着させることになり、実質所得の停滞が消費構造に与える歪みを過小評価してしまう危険性がある。

日本のエンゲル係数上昇や家計の需要システムに関する実証研究は、これまでいくつか蓄積されてきた。小嶋・他(2017)は、需要システムの推定によらず、エンゲル係数を支出の恒等式として表してこれを全微分し、その変動を食料・非食料それぞれの価格要因と数量要因へ会計的に分解する手法（および実質消費を物価・可処分所得に回帰する簡便な時系列分析）により、所得階層別に近年の上昇要因を検討している。竹内・住本(2020)は、線形近似AIDS(LA-AIDS; Deaton and Muellbauer, 1980)を家計調査データに適用して需要の価格弾力性・支出弾力性および嗜好バイアスを推定し、それらを上記と同型のエンゲル係数の全微分による要因分解に組み込んでいる。これらの実証研究は、近年のエンゲル係数上昇が、食料価格の上昇（価格効果）と実質消費支出の減少（所得効果）の双方によってもたらされていることを示唆している。また、阿部・他(2026)は、AIDS/QUAIDSを用いて2024年以降の米価格上昇が家計に与えた影響を分析し、米の自己価格弾力性が相対的に小さく他の主食への代替も限定的であること、および反実仮想に基づく補償変分が低所得層ほど相対的に大きい可能性があることを示している。国際的

にも、世帯支出データから所得階層別の生計費・厚生を復元する手法が急速に発展しており、Atkin et al. (2024) は（相対）エンゲル曲線の水平シフトから理論整合的な所得階層別物価指数と厚生変化を識別する方法を提示している。本研究は、こうした潮流に対し、構造的な NH-CES 需要システムの推定を通じて生計費・厚生計測に接近する点に特徴がある。

しかし、AIDS 等の柔軟な関数形 (Flexible Functional Form) を用いた既存のアプローチには、パラメータ数が多く、マクロ経済学的な多部門一般均衡モデル (CGE モデルなど) や長期的な構造転換 (Structural Transformation) の議論との接続が難しいという課題がある。一方で、マクロ経済モデリングにおいてその扱いやすさから標準的に用いられる CES (Constant Elasticity of Substitution) 効用関数は、「ホモセティック (相似拡大的)」であるという強い仮定を置いている。ホモセティック CES ではすべての財の所得弾力性が 1 に制約されるため、実質所得の低下に伴って必需品 (食料) の支出シェアが上昇するという「所得効果」を構造的に表現できない。その結果、標準的 CES を用いてエンゲル係数の変動を分析すると、実質所得低迷の影響が捨象され、シェアの変動がすべて相対価格の変化 (価格効果) に帰着してしまい、代替弾力性に過大なバイアスをもたらす危険性がある。

マクロ経済動学や一般均衡理論において、この「非相似拡大的 (Non-homothetic) な需要体系」を組み込むことの重要性は、近年さかんに論じられてきた。とりわけ Matsuyama (2019) は、非相似拡大的選好 (エンゲルの法則) を組み込んだ構造変化・技術革新・貿易のグローバル経済モデルを展開し、需要側の所得効果が長期的な産業構造の転換を駆動する機構を定式化している。

本研究の目的は、こうした理論的洞察を基座に置き、近年の日本のエンゲル係数上昇の要因を「価格効果」と「所得効果」に厳密に要因分解することである。そのために、本研究では Comin, Lashkari, and Mestieri (2021) によって提唱された Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 効用関数に基づく需要システムを日本のデータに導入する。NH-CES モデルは、標準的 CES の扱いやすさを保ちながら、各財に異なる所得特性パラメータを導入することで、非相似拡大的な需要体系 (エンゲルの法則) を明示的に捉えることができる近年のマクロ経済学におけるフロンティアである。

本研究の目的を達成するため、以下のアプローチを採用する。まず、分析の基盤として、総務省『家計調査 (二人以上の世帯のうち勤労者世帯)』の都道府県別・10 大分類パネルデータ (2014 年-2024 年)、および同省『小売物価統計調査』が公表する消費者物価地域差指数を統合したデータセットを構築する。

次いで、Comin et al. (2021) の Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要シス

テムを適用し、標準的なホモセティック CES モデルとの比較を通じて構造パラメーターを推定する。実質消費支出インデックスの構築に際しては、各都道府県の支出構造を反映した Törnqvist 価格指数を用いて名目支出をデフレートする。さらに、計量経済学的な推定においては、相対価格の内生性や測定誤差を排除するため、自県を除く他都道府県の平均価格を用いた空間的 Hausman 型操作変数法 (Spatial Hausman-type IV) による 2 段階最小二乗法 (2SLS) を導入する。また、外揃バイアスによる嗜好パラメーターの歪みを防ぐための「平均中心化 (Mean-centering)」や、社会全体の所得特性パラメーターの加重平均を 1 に置く「マクロ整合的規格化 (Macro-consistent normalization)」を施すことで、理論と実証データを完璧に接合した頑健な識別戦略を構築する。

反実仮想 (Counterfactual) シミュレーションを用いた分析の結果、本研究は次の 2 つの発見を得た。第一に、日本の家計の需要システムが明確に非相似拡大的であることを頑健に識別した。主推定 (地方ブロック固定効果) では結合 Wald 検定がホモセティック制約を強く棄却し ($\chi^2(9) = 80.2, p < 0.001$)、wild クラスタ・ブートストラップによる honest 推論でも、教育・被服・教養娯楽が有意な奢侈財、食料・家具が有意な必需財として識別された。とりわけ本研究の所得チャンネルの基礎である食料の必需性は $\eta_{\text{食料}} = 0.70$ ($P(\eta < 1) = 0.993$) として頑健に支持される。これにより、すべての財の所得弾力性を 1 に制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。第二に、2015 年–2024 年のエンゲル係数上昇 (実績 +3.4% ポイント) の要因分解では、価格効果が支配的であり (モデル総効果の 69%、実績変化の 55%)、財間の代替の困難さ ($\sigma = 0.43 < 1$ の補完性) を通じて相対価格の高騰がエンゲル係数を押し上げていた。非相似拡大的な所得効果も食料シェアを同方向に押し上げるが、その寄与は穏当 (モデル総効果の 13.5%) で、世帯構成の変化 (人口属性効果, 同 16.6%) と同程度であった。この 2 つの発見は矛盾しない。非相似拡大性は需要システムの横断面・水準における構造的特性であり、特定期間の時系列変動を価格・所得・人口属性の各チャンネルへ配分する要因分解とは別のマージンに属するためである。所得効果を構造的に表現できないホモセティック CES は、需要の非相似拡大的構造そのものを捉えられない点で誤設定であるが、本分析期間のエンゲル係数上昇という現象に限れば、その主因は価格効果にあった。

さらに、標準的 CES と NH-CES の生計費・効用水準を試算・比較すると、名目支出の伸びが生計費上昇に吸収され実質消費は約 5% 低下したこと、および NH-CES の生計費が必需財インフレの 2022 年に CES を +0.89 ポイント上回り、NH-CES が superlative 指数 (Törnqvist) をよく近似する一方で CES がこれを下回ること—すなわちホモセティック CES がインフレ局面の生計費を過小評価すること—が示される。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数上昇が価格主導であったことと別の分析マージンに属

し、両者は整合的である。

本研究の学術的および政策的な貢献は主に以下の4点に集約される。第一に、日本のエンゲル係数上昇というミクロな家計の防衛行動を、現代マクロ経済学の洗練された需要システム (Implicit NH-CES) の言語を用いて厳密にモデリング・定量化した点である。これにより、単なる記述統計の域を超え、陰関数定理に基づくミクロ的基礎づけを持った構造推定が可能となった。第二に、計量経済学的なリサーチデザインにおいて、空間的 IV、平均中心化、および加重平均規格化を包括的に導入し、効用関数の単調性制約 (Well-behaved condition) を満たす頑健な需要の所得弾力性を復元した点である。第三に、近年のエンゲル係数上昇という時系列現象が主として相対価格の高騰によって駆動されている一方で、その背後にある日本の需要システムが非相似拡大的であること——すなわち実質所得の変動が必需品と奢侈品の支出配分を非対称に動かす構造——を頑健に識別した点である。これにより、相対価格の歪みへの対処と、実質購買力の維持・向上を企図するマクロ経済政策の双方の意義を、構造推定に基づいて整理した。第四に、推定された需要システムを用いて標準的 CES と NH-CES の生計費指数および効用水準を試算・比較し、ホモセティシティ制約が生計費・厚生計測に与える影響を定量化した点である。需要構造の選択に起因する生計費の差は平穏な年には小さいものの、必需財価格が高騰した2022年には +0.89 ポイントに達し、推計生計費指数と公式 CPI の乖離と同オーダーとなる。すなわちホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費を過小評価しており、厚生計測における需要構造の選択は——とりわけインフレ局面では——無視できないことを構造推定の観点から示した。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2節では、伝統的な需要システム分析およびマクロ経済学のベンチマークとなる、標準的 (ホモセティック) な CES 効用関数に基づく消費理論について体系的な整理を行う。続く第3節では、本研究の理論的コアとなる Comin et al. (2021) の Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 効用関数に基づく消費理論へと展開し、陰関数定理を用いた支出シェア方程式の定式化、および需要の所得弾力性の数学的導出を詳述する。第4節では、構築された理論的フレームワークを現実の日本経済へと適用する「日本の食料品エンゲル係数の実証分析」を展開する。具体的には、使用する都道府県パネルデータの概要と Törnqvist 実質消費インデックスの構築プロセスを説明した後、空間的 Hausman 型操作変数法 (IV) を用いた 2SLS による構造パラメーターの推定結果、および反実仮想シミュレーションによるエンゲル係数変動の価格・所得・人口属性への要因分解結果を提示する。第5節では、本研究の発見が持つ政策的インプリケーションや、推定された需要システムの非相似拡大性が持つ厚生的含意についてディスカッションを行い、最後に第6節において本稿の結論を述べる。

2 CES 型効用関数

CES(Constant Elasticity of Substitution) 型の効用関数は消費理論においては代表的な効用関数である。需要の代替の弾力性が全ての財で一定であり、無差別曲線が相似拡大的であることが知られている。また、その特殊な例として、線形効用関数、コブ・ダグラス型効用関数、レオンチェフ型の効用関数も含む。

なお、以下では変数を次の様に定義する。

- t 期の財・サービスの数量ベクトル:

$$q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{N_t t})$$

- t 期の財・サービスの価格ベクトル:

$$p_t = (p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{N_t t})$$

- t 期の財・サービスの集合: Θ_t

- t 期の財・サービスの数: $N_t = N(\Theta_t)$

2.1 家計の効用最大化問題

t 期の効用水準を U_t とするとき、CES 型効用関数を次の様に書くことができる。

$$U_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1)$$

ここで、 $a_i > 0$ は家計の消費生活に占める第 i 財の相対的な重要度 (Taste Parameter) を示している。従って、 a_i の絶対水準には意味はない。ここでは CES 型効用関数を基準化するために $\sum_{i \in \Theta_t} a_i = 1$ とする。代替の弾力性を σ とすると、 ρ は次の様なパラメーターである。

$$\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}, \quad \rho \leq 1, \quad \rho \neq 0.$$

従って、CES 型効用関数を次の様に書くこともできる。

$$U_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \sigma \geq 0.$$

代替の弾力性パラメーター ($\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$) と効用関数の形状を整理すると以下の通りである。

表1 CES型効用関数における ρ と σ の関係

ρ の範囲	σ の範囲	性質	解釈
$\rho \rightarrow 1$	$\sigma \rightarrow \infty$	線形効用	完全代替
$0 < \rho < 1$	$1 < \sigma < \infty$	—	代替性が高い
$\rho \rightarrow 0$	$\sigma \rightarrow 1$	コブ=ダグラス型	単位弾力性 ($\sigma = 1$)
$\rho < 0$	$\sigma < 1$	—	補完性が強い
$\rho \rightarrow -\infty$	$\sigma \rightarrow 0$	レオンチェフ型	完全補完

Y_t を t 期の家計消費に用いる予算 (所得) とするとき、予算制約式は以下の通りである。

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq Y_t.$$

このとき、家計が直面する効用最大化問題は以下の様に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max_{q_{it}} & \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \\ \text{subject to} & \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq Y_t. \end{aligned}$$

この問題の内点解の一階条件をラグランジュの未定乗数法を用いて導出する。

$$\mathcal{L}_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} + \lambda_t \left(Y_t - \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \right).$$

\mathcal{L}_t は最適化問題のラグランジュ関数、 λ_t はラグランジュ乗数である。この関数を q_{it} と λ_t について偏微分してゼロに等しいと置くことで関数の最大化点の1階の条件を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} &= \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} - \lambda_t p_{it} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \lambda_t} &= \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} - Y_t = 0. \end{aligned}$$

一つ目の条件から、次の様に展開できる。

$$\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} = \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho} - 1} a_i q_{it}^{\rho - 1} = \lambda_t p_{it}.$$

両辺に q_{it} を掛けると、

$$\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \lambda_t p_{it} q_{it}$$

効用関数の定義 (1)、 $U_t = U(q_t) = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$ 、を用いると、次の表現を得る。

$$\begin{aligned} U_t \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} &= \lambda_t p_{it} q_{it} \\ \Leftrightarrow \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} &= \frac{\lambda_t}{U_t} p_{it} q_{it} \end{aligned}$$

ここでの CES 型効用関数では 1 次同次性を仮定しているため、次のオイラーの定理 (Euler's Theorem) が成立する。

$$\sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} q_{it} = U(q_t) = U_t$$

オイラーの定理に $\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} = 0$ の条件、つまり $\frac{\partial U}{\partial q_{it}} q_{it} = \lambda_t p_{it} q_{it}$ を代入すると、

$$U(q_t) = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} q_{it} = \lambda_t \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \lambda_t Y_t.$$

つまり、ラグランジュ係数は所得 Y_t を効用水準 U_t に変換するもの、または所得が 1 単位増加したときの効用の増加分 (所得の限界効用) と解釈することができる。このとき、

$$U_t = \lambda_t Y_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_t}{U_t} = \frac{1}{Y_t}$$

ここで、前小節の $\frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \frac{\lambda_t}{U_t} p_{it} q_{it}$ に代入すると、次の表現を得る。

$$\frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t}.$$

つまり、消費者行動における総支出に占める第 i 財の支出シェア w_{it} の効用関数のパラメーターによる表現を得た。

$$w_{it} = \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt}q_{jt}} = \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho}. \quad (2)$$

2.2 通常の需要関数

CES 型効用に基づく通常の需要関数 (Marshallian Demand Function) を導出する。通常の需要関数とは家計が所与の所得と価格ベクトルの下で効用最大化行動をとる際の需要ベクトルの決定式である。

$$q_{it} = D_i^M(p_t, Y_t)$$

効用最大化問題の 1 階の条件の第 1 式から、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho} - 1} a_i q_{it}^{\rho - 1} &= \lambda_t p_{it} \\ q_{it}^{\rho - 1} &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{1 - \frac{1}{\rho}} \\ &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{\rho - 1}{\rho}} \\ &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} U_t^{\rho - 1} \\ &\Leftrightarrow \\ q_{it} &= \lambda_t^{\frac{1}{\rho - 1}} a_i^{-\frac{1}{\rho - 1}} p_{it}^{\frac{1}{\rho - 1}} U_t. \end{aligned}$$

これを、予算制約式に代入すると、以下の表現を得る。

$$\begin{aligned}
Y_t &= \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} \left(\lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} U_t \right) \\
&\Leftrightarrow \\
\lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} &= U_t^{-1} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{-1} Y_t.
\end{aligned}$$

上記の $\lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}}$ の式を $q_{it} = \lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} U_t$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
q_{it} &= \left(U_t^{-1} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^{\frac{1}{1-\rho}} p_{jt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{-1} Y_t \right) a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} U_t \\
&= \left(\frac{a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^{\frac{1}{1-\rho}} p_{jt}^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right) Y_t.
\end{aligned}$$

これを整理して、通常的需求関数を得る。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} Y_t.$$

ρ と代替の弾力性 σ の関係に注意すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\rho} &= \sigma, \\
\frac{\rho}{\rho-1} &= 1-\sigma
\end{aligned}$$

これを通常的需求関数に代入すると、代替の弾力性による通常的需求関数を得る。

$$q_{it} = D_i^M(p_t, Y_t) = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{Y_t}{p_{it}} \quad (3)$$

2.2.1 限界代替率と価格比

通常的需求関数が得られたところで、最適消費における限界代替率（Marginal Rate of Substitution; MRS）と価格比の関係を見ておこう。限界代替率とは、ある財の消費を 1

単位増やしたとき、ある財の消費をどれだけ減らせば元の効用水準を維持できるかという交換比率である。無差別曲線上で効用関数を全微分すると、次の様に書くことができる。

$$dU_t = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} dq_{it} = 0.$$

ここで、第 i 財と第 j 財の変化のみに着目し、他の財の消費量は一定と仮定すると、

$$dU_t = \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} dq_{it} + \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}} dq_{jt} = 0.$$

これを解くことで第 i 財と第 j 財の限界代替率を求めることができる。

$$MRS_{ij} = \frac{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}}}{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}}} = -\frac{dq_{jt}}{dq_{it}}$$

ここで 1 階の条件における第 i 財の限界効用が $\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} = \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} = \lambda_t p_{it}$ であることに着目すると、最適消費における限界代替率の比が価格比に等しいことを示すことができる。

$$MRS_{ij} = \frac{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}}}{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}}} = \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{a_j q_{jt}^{\rho-1}} = \frac{p_{it}}{p_{jt}}$$

これを整理すると、内点解が成立する条件を示すことができる。

$$\frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{p_{it}} = \frac{a_j q_{jt}^{\rho-1}}{p_{jt}}$$

ここで、端点解の条件について考察しておく。ここでは第 i 財の消費量がゼロ ($q_{it} = 0$) となるケースを考察する。最適消費が実現するケースでは全ての財について価格 1 単位当たりの限界効用が均等となる。 $\rho - 1 = -1/\sigma$ であることに注意すると、

$$\frac{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{jt}} = \kappa, \quad \forall j.$$

もし第 i 財で次の条件が成り立つなら、 $q_{it} = 0$ となる。

$$\frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{it}} < \frac{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{jt}} = \kappa.$$

つまり、限界代替率 (MRS_{ij}) が価格比 ($\frac{p_{it}}{p_{jt}}$) より低いときに、端点解が成立する。

$$MRS_{ij} = \frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} < \frac{p_{it}}{p_{jt}}.$$

ここで、 $q_{it} \rightarrow 0$ のとき、 MRS_{ij} がどのような値に収束するか考えてみよう。もし、代替の弾力性が高い (代替的: $\sigma > 1$) なら、

$$\lim_{q_{it} \rightarrow 0} MRS_{ij} = \lim_{q_{it} \rightarrow 0} \left(\frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} \right) = \infty.$$

このケースでも、 p_{it}/p_{jt} ($> MRS_{ij}$) も無限大に発散してしまい、端点解はあり得ない。 $\sigma \rightarrow 1$ のケース (コブ・ダグラス型) でも同様に端点解はあり得ない。従って、財が分割可能 ($q_{it} > 0$ をいくらでも小さくできる) なとき、CES 型効用関数において端点解は起こりえない。

財の代替性が高い ($\sigma > 1$)、かつ、財が分割不可能で q_{it} に下限 (\bar{q}_i) があるとき、

$$MRS_{ij} = \frac{a_i \bar{q}_i^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} < \frac{p_{it}}{p_{jt}},$$

となるなら、第 i 財の相対価格が非常に高いとき、第 i 財の消費量がゼロ ($q_{it} = 0$) という端点解が起こり得る。

もし、代替の弾力性が低い (補完的: $0 < \sigma < 1$ 、つまり、 $\rho < 0$) なら、第 i 財の消費量がゼロ ($q_{it} = 0$) のとき、効用関数はこのように書くとしよう。

$$U_t = \left(a_i q_{it}^\rho + \sum_{\substack{j \in \Theta_t \\ j \neq i}} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

このとき、 $\rho = -1$ とすると、

$$U_t = \frac{1}{\left(\frac{a_i}{q_{it}} + \sum_{\substack{j \in \Theta_t \\ j \neq i}} \frac{a_j}{q_{jt}} \right)}$$

ここで、 $q_{it} = 0$ とすれば、分母が無限大となり、効用は無窮小になる。従って、 $\rho < 0$ のとき、どれか一つの財でも消費量をゼロとすれば、その時点で効用がゼロとなるため、端点解は起こりえない。

2.2.2 支出シェア：数量ベクトルと価格ベクトル

通常の需要関数 ((3) 式) から、価格ベクトルに基づく最適消費の支出シェアを導出する。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} Y_t$$

両辺を Y_t で割って、 p_{it} をかけると、以下の表現を得る。

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \quad (4)$$

先に消費数量ベクトルに基づく最適消費の支出シェア ((2) 式) を導いた。ただし、ここでは $(\sigma - 1)/\sigma = \rho$ である。

$$w_{it} = \frac{a_i q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

効用最大化の一階の条件から、次の式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} &= \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{a_j q_{jt}^{\rho-1}} = \frac{p_{it}}{p_{jt}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{p_{it}} &= \frac{a_j q_{jt}^{\rho-1}}{p_{jt}} = \kappa \\ q_{it}^\rho &= a_i^{\frac{\rho}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \kappa^{\frac{\rho}{\rho-1}} \\ &= a_i^{\sigma-1} p_{it}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma} \end{aligned}$$

これを消費数量ベクトルに基づく最適消費の支出シェアに代入すると、価格ベクトルに基づく最適消費シェアに一致する。

$$\begin{aligned}
w_{it} &= \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} \\
&= \frac{a_i a_i^{\sigma-1} p_{it}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j a_j^{\sigma-1} p_{jt}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma}} \\
&= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}
\end{aligned}$$

2.2.3 需要の所得弾力性

通常の需要関数を用いて第 i 財の需要の所得弾力性 ($\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial Y_t/Y_t}$) を計算する。通常の需要関数を Y_t で偏微分すると、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial Y_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{1}{p_{it}}.$$

両辺に Y_t/q_{it} を掛ければ、CES 型効用による需要の所得弾力性が 1 であることがわかる。

$$\frac{\frac{\partial q_{it}}{q_{it}}}{\frac{\partial Y_t}{Y_t}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{Y_t}{p_{it} q_{it}} = w_{it} \frac{1}{w_{it}} = 1$$

2.2.4 自己価格弾力性と交差弾力性

自己価格弾力性

通常の需要関数から需要の自己価格弾力性 (own price elasticity of demand) を導く。まず、通常の需要関数の自己価格についての偏微分を求める。 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} = A$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{\partial D_i^M(p_t, Y_t)}{\partial p_{it}} \\
&= \frac{\partial (a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} Y_t)}{\partial p_{it}} \\
&= -\sigma a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma-1} A^{-1} Y_t - a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} Y_t \frac{\partial A}{\partial p_{it}}.
\end{aligned}$$

$\frac{\partial A}{\partial p_{it}} = (1 - \sigma)a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$ であることを用いて、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} = -\sigma a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma-1} A^{-1} Y_t - a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} Y_t (1 - \sigma) a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$$

$q_{it} = a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} Y_t$ であることを用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{1}{p_{it}} (-\sigma q_{it} - (1 - \sigma) q_{it} A^{-1} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}) \\ &= \frac{q_{it}}{p_{it}} (-\sigma - (1 - \sigma) A^{-1} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}). \end{aligned}$$

$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{A} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t}$ であることに注意すれば、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} = -\frac{q_{it}}{p_{it}} (\sigma + (1 - \sigma) w_{it}).$$

従って需要の自己価格の弾力性 e_{ii} は次の様に求められる。

$$e_{ii} = -\frac{\frac{\partial q_{it}}{q_{it}}}{\frac{\partial p_{it}}{p_{it}}} = \sigma + (1 - \sigma) w_{it}$$

もし、第 i 財のシェアが無視できるほど小さいなら、 $e_{ii} \approx \sigma$ となり、需要の自己価格弾力性は代替の弾力性 σ に極めて近いことが示される。 $\sigma = 1$ なら、 $e_{ii} = 1$ となり、価格の上昇率と数量の減少率の絶対値が等しく、販売シェアは一定となる。

交差価格弾力性

次に、需要の交差価格弾力性 (cross price elasticity of demand) を導く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} &= \frac{\partial D_i^M(p_t, Y_t)}{\partial p_{jt}} \\ &= \frac{\partial (a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} Y_t)}{\partial p_{jt}} \\ &= -a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} Y_t \frac{\partial A}{\partial p_{jt}} \end{aligned}$$

$\frac{\partial A}{\partial p_{it}} = (1 - \sigma)a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$ であることを用いて、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} Y_t (1 - \sigma) a_j^\sigma p_{jt}^{-\sigma}$$

$q_{it} = a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} Y_t$ であることを用いて整理すると、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -q_{it} (1 - \sigma) A^{-1} a_j^\sigma p_{jt}^{-\sigma}$$

$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{A} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t}$ であることに注意すれば、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -\frac{q_{it}}{p_{jt}} (1 - \sigma) w_{jt}$$

従って需要の交差価格の弾力性 e_{ij} は次の様に求められる。

$$e_{ij} = -\frac{\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}}}{\frac{q_{it}}{p_{jt}}} = (1 - \sigma) w_{jt}$$

つまり、 $\sigma > 1$ なら、第 j 財の価格上昇は、第 i 財の需要の増加につながる（粗代替材）。 $\sigma < 1$ なら、第 j 財の価格上昇は、第 i 財の需要の減少につながる（粗補完財）。 $\sigma = 1$ なら、 $e_{ij} = 0$ となり、他の財の価格変化は第 i 財の購入数量に影響を与えない。

2.3 間接効用関数

CES 型効用に基づく間接効用関数 (Indirect Utility Function) を導出する。間接効用関数とは家計が所与の所得水準と価格ベクトルの下で効用最大化行動をとる際の効用水準の決定式である。

$$U_t = V(p_t, Y_t)$$

CES 型効用関数に通常的需求関数 ((3) 式) を代入することで、間接効用関数を得る。

$$\begin{aligned}
U_t &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i (q_{it})^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i \left(\frac{a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}}} Y_t \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(Y_t^\rho \sum_{i \in \Theta_t} a_i \left(\frac{a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(Y_t^\rho \sum_{i \in \Theta_t} a_i \frac{a_i^{\frac{\rho}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= Y_t \left(\frac{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= Y_t \frac{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho}{\rho}} } \\
&= \frac{Y_t}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}}
\end{aligned}$$

これを代替の弾力性を用いて表現すれば、以下の通りである。

$$\frac{Y_t}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} = V(p_t, Y_t) \quad (5)$$

2.4 支出関数

家計行動における効用最大化問題と費用最小化問題の双対性から、間接効用関数を用いて支出関数を求めることができる。支出関数とは、家計が所与の価格ベクトルの下で効用水準 U_t を達成するための最小費用水準の決定式である。

$$Y_t = E(p_t, U_t)$$

間接効用関数 (5) を所得 Y_t について解けば、以下の支出関数を得る。

$$Y_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t = E(p_t, U_t) \quad (6)$$

これを効用水準 U_t で割ると、単位費用関数 (Unit Cost Function) を得る。単位費用関数を物価水準 P_t と定義しておく。

$$E(p_t, 1) = \frac{E(p_t, Y_t)}{U_t} = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \equiv P_t \quad (7)$$

つまり、効用水準 U_t を計算することができれば、 Y_t/U_t によって、物価水準を推定することができる。

2.5 補償需要関数

CES 型効用に基づく補償需要関数 (Hicksian Demand Function) を導出する。補償需要関数とは家計が所与の効用水準と価格ベクトルの下で支出最小化行動をとる際の需要ベクトルの決定式である。

$$q_{it} = D_i^H(p_t, U_t)$$

通常的需求関数、 $D^M(p_t, Y_t)$ 、に支出関数、 $Y_t = E(p_t, U_t)$ 、を代入すると、以下の様に補償需要関数を導出できる。

$$\begin{aligned}
q_{it} &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{Y_t}{p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t}{p_{it}} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} U_t \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma} - \frac{1-\sigma}{1-\sigma}} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} U_t \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\
&= a_i^\sigma \left(\frac{p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} U_t = D^H(p_t, U_t)
\end{aligned} \tag{8}$$

2.5.1 シェファードの補題

効用関数が強純凹性と連続微分可能性をもつとき、支出関数 (6) を価格 p_{it} について偏微分すると、補償需要関数が導出される。これをシェファードの補題 (Shephard's Lemma) と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(p_t, U_t)}{\partial p_{it}} &= \frac{\partial \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t}{\partial p_{it}} \\
&= \frac{1}{1-\sigma} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} U_t \cdot a_i^\sigma (1-\sigma) p_{it}^{-\sigma} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} U_t \\
&= a_i^\sigma \left(\frac{p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} U_t = D^H(p_t, U_t)
\end{aligned}$$

2.6 構造パラメーターの推定式の導出

通常の需要関数の支出シェア表現 ((4) 式) で、以下の表現を導いた。

$$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}.$$

ここで、第 i 財の支出シェアと基準財（第 b 財）の支出シェアの比を取れば、以下の様に整理できる。

$$\frac{w_{it}}{w_{bt}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{a_b^\sigma p_{bt}^{1-\sigma}}$$

両辺の対数をとれば、構造パラメーターの推定式を得る。

$$\ln \left(\frac{w_{it}}{w_{bt}} \right) = \sigma \ln \left(\frac{a_i}{a_b} \right) + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{it}}{p_{bt}} \right). \quad (9)$$

この支出シェアの需要式を識別するには、価格比 $\ln \left(\frac{p_{it}}{p_{bt}} \right)$ の内生性に対処する必要がある。識別戦略については実証分析の節で詳しく説明する。

3 Non-homothetic CES 型効用関数

Non-homothetic CES 型の効用関数は近年注目される効用関数型である。CES 型効用関数とは違い需要の代替の弾力性が全ての財で一定とはならず、所得水準に応じて変化する。Non-homothetic の名に示されるように無差別曲線の相似拡大性も消失する。Homothetic な CES 型効用関数では所得増減に伴うエンゲル係数の変動といった現象を説明することはできず、Non-homothetic な性質を持つ効用関数が必要である。陰関数 (implicit additivity) によって需要の非相似拡大性を表現するこの定式化は Hanoch (1975) の陰的加法性モデルに起源をもち、Comin et al. (2021) がこれをマクロ経済の構造変化分析に適した形へ整備したものである。

3.1 陰関数による効用関数の定義

t 期の効用水準を U_t とするとき、Non-homothetic CES 型効用関数を次の様に陰関数として書くことができる。

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma}} q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} = 1, \quad a_i > 0, \quad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1 \quad (10)$$

ここで、 a_i は家計の消費生活に占める第 i 財の相対的な重要度 (Taste Parameter) を示している。ここでは CES 型効用関数を基準化するために

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i = 1$$

とする。

この陰関数において $\epsilon_i = \epsilon$ とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} &= 1, \\ C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} \sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} &= 1, \\ C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{-1}, \\ C_t &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma - \epsilon}}. \end{aligned}$$

もし、 $\epsilon = 1$ とすれば、この関数は CES 型効用関数と一致する。

$$C_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}.$$

なお、相対弾力性 ϵ_i は財間の差 $\epsilon_i - \epsilon_j$ のみが需要に現れて識別されるため、その水準には規格化が必要である。本稿の実証分析では、社会全体の加重平均を 1 とするマクロ整合的規格化 ($\bar{\epsilon} = 1$ 、後述) を採用する。

3.2 家計の効用最大化問題

予算制約式は以下の通りである。

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq Y_t$$

このとき、家計が直面する効用最大化問題は以下の様に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max_{q_{it}} \quad & C_t = U(q_t), \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma - 1)/\sigma} = 1, \\ & \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq Y_t. \end{aligned}$$

この問題の内点解の一階条件をラグランジュの未定乗数法を用いて導出する。

$$\mathcal{L}_t = C_t - \lambda_{1t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} - 1 \right] - \lambda_{2t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} - Y_t \right]$$

\mathcal{L}_t は最適化問題のラグランジュ関数、 $\lambda_{1t}, \lambda_{2t}$ はラグランジュ乗数である。この関数を q_{it} 及び C_t について偏微分し、0 と置くことで関数の最大化点の1階の条件を求める。

まず、 $\partial \mathcal{L}_t / \partial C_t = 0$ から考察する。

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial C_t} = 1 - \lambda_{1t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - 2\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} \right] = 0.$$

C_t を総和計算から括りだすと、

$$\frac{C_t}{\lambda_{1t}} = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}$$

効用関数の定義 (10) より、 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = 1$ であるから、 $a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}$ は財 i についてのウェイトと解釈できるから、 C_t / λ_{1t} は $(\epsilon_i - \sigma) / \sigma$ の加重平均であると解釈できる。

$$\bar{\epsilon}(q_t, C_t) = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \frac{C_t}{\lambda_{1t}}$$

次に、 $\partial \mathcal{L}_t / \partial q_{it} = 0$ について考察する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} &= \lambda_{1t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \frac{\sigma - 1}{\sigma} q_{it}^{-1/\sigma} - \lambda_{2t} p_{it} = 0, \\ \Leftrightarrow \lambda_{2t} p_{it} &= \lambda_{1t} \frac{\sigma - 1}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}, \\ \Leftrightarrow p_{it} &= \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}. \end{aligned}$$

この条件から、次の様に展開できる。両辺に q_{it} を掛けると、

$$p_{it} q_{it} = \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

全ての財について、足し合わせると、

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} \right).$$

効用関数の定義 (10) から、右辺第 3 項は 1 であるから、

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma}.$$

この式を用いて、 $p_{it} q_{it} = \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma - 1)/\sigma}$ の両辺を割れば、

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it}} = a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma - 1)/\sigma}.$$

3.2.1 限界代替率と価格比

価格比と限界代替率との関係は $p_{it} = \frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}$ の財 i と財 j で比をとることで導くことができる。

$$\frac{p_{it}}{p_{jt}} = \frac{\frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{\frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_j C_t^{(\epsilon_j - \sigma)/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = \frac{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = MRS_{ij}$$

この式を次の様に変形する。

$$\begin{aligned} \frac{p_{it}}{p_{jt}} &= \frac{\frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{\frac{\lambda_{1t} \sigma - 1}{\lambda_{2t} \sigma} a_j C_t^{(\epsilon_j - \sigma)/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = \frac{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma}}{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma}} \left(\frac{q_{it}}{q_{jt}} \right)^{-1/\sigma} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{q_{it}}{q_{jt}} \right)^{-1/\sigma} &= \frac{p_{it}}{p_{jt}} \cdot \frac{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma}}{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma}} \\ \Leftrightarrow \frac{q_{it}}{q_{jt}} &= \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j} \end{aligned}$$

この式は財 i と財 j の購入比率が効用水準と相対弾力性の差 ($\epsilon_i - \epsilon_j$) に依存することを示している。支出シェアの比については次の様に書くことができる。

$$\frac{(p_{it} q_{it})/Y_t}{(p_{jt} q_{jt})/Y_t} = \frac{w_{it}}{w_{jt}} = \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{1 - \sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j} \quad (11)$$

3.3 通常の需要関数

相対消費数量の式、 $\frac{q_{it}}{q_{jt}} = \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j}$ 、を q_{jt} について解く。

$$q_{jt} = q_{it} \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^\sigma \left(\frac{p_{jt}}{p_{it}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_j - \epsilon_i}$$

これを、予算制約式、 $\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt} q_{jt} = Y_t$ 、に代入する。

$$\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt} q_{jt} \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^\sigma \left(\frac{p_{jt}}{p_{it}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_j - \epsilon_i} = Y_t$$

$$q_{it} a_i^{-\sigma} p_{it}^\sigma C_t^{-\epsilon_i} \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} = Y_t$$

整理すれば、通常の需要関数の形を得る。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} = D_i^M(p_t, Y_t, C_t). \quad (12)$$

この需要関数は効用水準 C_t を消すことができず、 C_t は効用関数の定義から implicit に決定されるため、インプリシットな通常の需要関数 (Implicit Marshallian Demand Function) と呼ばれる。

また、この需要関数において $\epsilon_i = \epsilon$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の通常の需要関数 (3) と一致する。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^\epsilon}{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} = D_i^M(p_t, Y_t).$$

同時に、通常の需要関数から、支出シェアについての表現を得る。

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}. \quad (13)$$

これは効用水準が上昇すると、 ϵ_i が相対的に高い財の支出シェアが上昇することを示している。また、 ϵ_i が相対的に低い財の支出シェアが低下する (エンゲルの法則)。

また、この支出シェア関数において $\epsilon_i = \epsilon$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の通常の支出シェア関数と一致する。

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^\epsilon}{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}$$

3.4 支出関数

通常の需要関数 (12)、 $q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}}$ 、を効用関数の定義式 (10) に代入することで、支出関数を導出する。まず、通常の需要関数を $(\sigma - 1)/\sigma$ 乗する。

$$q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \left(\frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} \right)^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

これを、効用関数の定義式 (10)、 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = 1$ 、に代入すると、

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \left[\left(\frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} \right)^{(\sigma-1)/\sigma} \right] = 1.$$

整理すると、

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \left[(a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i} Y_t)^{(\sigma-1)/\sigma} \right] \\ &= \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} Y_t^{(\sigma-1)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma + \epsilon_i(\sigma-1)/\sigma} = 1. \end{aligned}$$

C_t の指数部分を整理する。

$$\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} + \epsilon_i \frac{\sigma - 1}{\sigma} = \frac{\epsilon_i - \sigma + \epsilon_i \sigma - \epsilon_i}{\sigma} = \epsilon_i - 1.$$

従って、

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} Y_t^{(\sigma-1)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1} = 1, \\ \Leftrightarrow Y_t^{(\sigma-1)/\sigma} &= \frac{\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(\sigma-1)/\sigma}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}, \\ \Leftrightarrow Y_t &= \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} = \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} C_t = E_N(p_t, C_t). \end{aligned}$$

以上の様に支出関数が導出された。

この支出関数において $\epsilon_i = \epsilon = 1$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の支出関数 (6) と一致する。

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}{C_t^{(\epsilon-1)\sigma/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\ &= C_t^{(\epsilon\sigma - \epsilon)/(\sigma-1) - (\epsilon\sigma - \sigma)/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{(\sigma-1)/(\sigma-1) - \sigma/(\sigma-1)} \\ &= C_t^{(\sigma - \epsilon)/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)} = C_t \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)} = E_H(p_t, C_t) \end{aligned}$$

次に、Non-homothetic 効用の支出関数を効用水準 C_t で割ることで、単位コスト関数を得る。

$$P_t = \frac{E_N(p_t, C_t)}{C_t} = \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1})^{\sigma/(\sigma-1)}}$$

3.5 間接効用関数

間接効用関数、 $C_t = V_t = V(p_t, Y_t)$ は支出関数を C_t について解くことで求めることができるが、Non-homothetic CES 効用関数では解析的に解くのは難しい。ここでは、効用水準と所得の関係を整理しておく。

$$E(p_t, C_t) = Y_t = \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1})^{\sigma/(\sigma-1)}} C_t \quad (14)$$

両辺の対数をとると、

$$\ln Y_t = \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1} \right) - \frac{\sigma}{\sigma-1} \ln \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1} \right) + \ln C_t$$

この式を C_t で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d \ln Y_t}{d C_t} &= \frac{d \ln Y_t}{d Y_t} \cdot \frac{d Y_t}{d C_t} = \frac{1}{Y_t} \cdot \frac{d Y_t}{d C_t} \\ &= \sum_{j \in \Theta_t} \frac{(\epsilon_j - 1) a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}} \cdot \frac{1}{C_t} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} \frac{(\epsilon_i - 1) a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}} \cdot \frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_t} \\ &= \sum_{j \in \Theta_t} \frac{(a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j})(\epsilon_j - 1)}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{1}{C_t} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} \frac{(a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i})(\epsilon_i - 1)}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}} \cdot \frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_t} \end{aligned}$$

ここで、支出シェア関数 (21)、 $w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}$ 、を用いれば、

$$\frac{C_t}{Y_t} \cdot \frac{d Y_t}{d C_t} = \frac{\sigma-1}{\sigma-1} \sum_{j \in \Theta_t} w_{jt} (\epsilon_j - 1) - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} (\epsilon_i - 1) + 1$$

ここで、相対弾力性の加重平均を $\sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i = \bar{\epsilon}$ と定義すると効用の所得弾力性を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d Y_t / Y_t}{d C_t / C_t} &= \frac{-1}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} (\epsilon_i - 1) + \frac{\sigma-1}{\sigma-1} = \frac{\bar{\epsilon}-1}{1-\sigma} - \frac{\sigma-1}{1-\sigma} = \frac{\bar{\epsilon}-\sigma}{1-\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{d C_t / C_t}{d Y_t / Y_t} &= \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon}-\sigma} \end{aligned} \quad (15)$$

従って、相対弾力性の加重平均 $\bar{\epsilon}$ が 1 に等しいなら、効用の所得弾力性は 1 になる。
次に、所得水準と財 i の価格の関係も整理しておく。

$$\ln Y_t = \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1} \right) - \frac{\sigma}{\sigma - 1} \ln \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1} \right) + \ln C_t$$

対数化された支出関数を p_{it} で微分すると、支出の価格弾力性が計算される。

$$\begin{aligned} \frac{d \ln Y_t}{dp_{it}} &= \frac{d \ln Y_t}{dY_t} \cdot \frac{dY_t}{dp_{it}} = \frac{1}{Y_t} \cdot \frac{dY_t}{dp_{it}} \\ &= (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} - \frac{\sigma}{\sigma - 1} (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} \\ &= (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} + \sigma \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} \\ \Leftrightarrow \frac{dY_t/Y_t}{dp_{it}/p_{it}} &= \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}} = \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \end{aligned}$$

両辺に Y_t/p_{it} をかければ、シェファードの補題に対応する関係 $\partial Y_t / \partial p_{it} = q_{it}$ を得る。

$$\frac{\partial Y_t}{\partial p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}} = q_{it}$$

3.6 補償需要関数

支出関数からシェパードの補題を用いて、補償需要関数 ($q_{it} = D^H(p_t, C_t)$) を導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(p_t, C_t)}{\partial p_{it}} &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E(p_t, C_t)}{p_{it}} \\ &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j - 1}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1})^{\sigma/(\sigma-1)}} \cdot \frac{C_t}{p_{it}} \\ &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - 1})^{\sigma/(\sigma-1)}} = D_i^H(p_t, C_t) = q_{it} \end{aligned}$$

これを用いて再度、支出シェア関数を得る。

$$\begin{aligned}
w_{it} &= \frac{p_{it}q_{it}}{Y_t} = \frac{p_{it}}{P_t C_t} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} = \frac{1}{P_t} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \left(\frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \right)^{-1} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}
\end{aligned}$$

3.6.1 需要の所得弾力性

通常的需求関数、 $q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{Y_t}{p_{it}}$ 、を用いて第 i 財の需要の所得弾力性 $\left(\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial Y_t/Y_t}\right)$ を計算する。通常的需求関数の自然対数をとると、

$$\ln q_{it} = \sigma \ln a_i - \sigma \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right) + \ln Y_t$$

需要の所得弾力性の計算では Y_t の直接効果だけではなく、 C_t の変化を通じた間接効果も表れる。具体的には次の様に計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln q_{it}}{d Y_t} &= \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{d q_{it}}{d Y_t} \\
&= \epsilon_i \cdot \frac{1}{C_t} \cdot \frac{d C_t}{d Y_t} - \left(\sum_{j \in \Theta_t} \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \epsilon_j \right) \frac{1}{C_t} \cdot \frac{d C_t}{d Y_t} + \frac{1}{Y_t} \\
\Leftrightarrow \frac{d q_{it}/q_{it}}{d Y_t/Y_t} &= (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{d C_t/C_t}{d Y_t/Y_t} + 1
\end{aligned}$$

$\frac{d C_t/C_t}{d Y_t/Y_t} = \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon}-\sigma}$ であることは (15) で既に求めた。これを代入すると需要の所得弾力性を得る。

$$\frac{d q_{it}/q_{it}}{d Y_t/Y_t} = (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} + 1 \quad (16)$$

もし、 $\epsilon_i = \epsilon = 1$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の所得弾力性と一致する。

$$\frac{d q_{it}/q_{it}}{d Y_t/Y_t} = (\epsilon - \epsilon) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \epsilon} + 1 = 1$$

つまり、1% の所得増加は 1% の財 i の需要を引き起こす。

もし $\epsilon_i > \bar{\epsilon}$ ならば、 $\frac{dq_{it}/q_{it}}{dY_t/Y_t} > 1$ となり、1% の所得増加は 1% より大きい財 i の需要を引き起こす（奢侈品）。もし $\epsilon_i < \bar{\epsilon}$ ならば、 $\frac{dq_{it}/q_{it}}{dY_t/Y_t} < 1$ となり、1% の所得増加は 1% より小さい財 i の需要を引き起こす（必需品）。

3.6.2 自己価格弾力性

q_{it} についての対数を取った通常の需要関数を次の様を書く。

$$\ln q_{it} = \sigma \ln a_i - \sigma \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \Omega_t + \ln Y_t, \quad \Omega_t = \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}$$

所得 Y_t は固定的であるとして、対数化された需要関数を p_{it} で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} \\ &= -\sigma \frac{1}{p_{it}} + \epsilon_i \frac{1}{C_t} \frac{\partial C_t}{\partial p_{it}} - \frac{1}{\Omega_t} \frac{\partial \Omega_t}{\partial p_{it}} \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_t} \frac{\partial \Omega_t}{\partial p_{it}} &= (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{1}{p_{it}} = (1 - \sigma) w_{it} \frac{1}{p_{it}} \\ \frac{1}{C_t} \frac{\partial C_t}{\partial p_{it}} &= -\frac{dC_t/C_t}{dY_t/Y_t} \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial p_{it}} \cdot \frac{1}{Y_t} = -\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{p_{it} q_{it}}{Y_t} \cdot \frac{1}{p_{it}} = -\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{w_{it}}{p_{it}} \end{aligned}$$

これらを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} = -\sigma \frac{1}{p_{it}} - \epsilon_i \frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{w_{it}}{p_{it}} - (1 - \sigma) w_{it} \frac{1}{p_{it}} \\ \frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial p_{it}/p_{it}} &= -\sigma - \epsilon_i \frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} w_{it} - (1 - \sigma) w_{it} \\ &= -\sigma + \left(\frac{(\sigma - 1)(-\epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}} + \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \bar{\epsilon})}{\sigma - \bar{\epsilon}} \right) w_{it} \\ &= -\sigma + \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \bar{\epsilon} - \epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{it} \end{aligned}$$

もし、 $w_{it} \rightarrow 0$ なら、自己価格弾力性は $-\sigma$ に収束する。

3.6.3 交差価格弾力性

q_{it} についての対数を取った通常の需要関数を次の様を書く。

$$\ln q_{it} = \sigma \ln a_i - \sigma \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \Omega_t + \ln Y_t, \quad \Omega_t = \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}$$

所得 Y_t は固定的であるとして、対数化された需要関数を p_{kt} ($k \neq i$) で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial p_{kt}} &= \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{kt}} \\ &= \epsilon_i \frac{1}{C_t} \frac{\partial C_t}{\partial p_{kt}} - \frac{1}{\Omega_t} \frac{\partial \Omega_t}{\partial p_{kt}} \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_t} \frac{\partial \Omega_t}{\partial p_{kt}} &= (1 - \sigma) \frac{a_k^\sigma p_{kt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_k}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{1}{p_{kt}} = (1 - \sigma) w_{kt} \frac{1}{p_{kt}} \\ \frac{1}{C_t} \frac{\partial C_t}{\partial p_{kt}} &= -\frac{dC_t/C_t}{dY_t/Y_t} \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial p_{kt}} \cdot \frac{1}{Y_t} = -\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{p_{kt} q_{kt}}{Y_t} \cdot \frac{1}{p_{kt}} = -\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{w_{kt}}{p_{kt}} \end{aligned}$$

従って、

$$\frac{\partial \ln q_{it}}{\partial p_{kt}} = \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{kt}} = \epsilon_i \left(-\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \cdot \frac{w_{kt}}{p_{kt}} \right) - (1 - \sigma) w_{kt} \frac{1}{p_{kt}}$$

両辺に p_{kt} を掛ければ、需要の交差価格弾力性を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial p_{kt}/p_{kt}} &= \epsilon_i \frac{1 - \sigma}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{kt} + (\sigma - 1) w_{kt} = \frac{-\epsilon_i(\sigma - 1) + (\sigma - \bar{\epsilon})(\sigma - 1)}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{kt} \\ &= \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \bar{\epsilon} - \epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{kt}, \quad (i \neq k) \end{aligned}$$

もし、 $w_{kt} \rightarrow 0$ なら、交差価格弾力性は 0 に収束する。

3.7 構造パラメーターの推定式

常の需要関数の支出シェア表現 ((13) 式) で、以下の表現を導いた。

$$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}$$

ここで、第 i 財の支出シェアと基準財（第 b 財）の支出シェアの比を取れば、以下の様に整理できる。

$$\frac{w_{it}}{w_{bt}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{a_b^\sigma p_{bt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_b}}$$

両辺の対数をとれば、構造パラメーターの推定式を導くことができる。

$$\ln\left(\frac{w_{it}}{w_{bt}}\right) = \sigma \ln\left(\frac{a_i}{a_b}\right) + (1-\sigma) \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{bt}}\right) + (\epsilon_i - \epsilon_b) \ln(C_t). \quad (17)$$

この需要方程式の推定方法と識別戦略については、実証分析の節で解説する。

4 日本の食料品エンゲル係数の実証分析

4.1 データ

本分析では、総務省『家計調査（二人以上の世帯のうち勤労者世帯）』および同省『小売物価統計調査』、『消費者物価指数（全国）』のデータを統合し、2014年から2024年までの47都道府県・10大分類パネルデータ（品目あたり観測数 $N = 517$ 、 $R = 47$ 都道府県 $\times T = 11$ 年）を構築した。勤労者世帯を分析対象とするのは、都道府県別に支出・世帯属性が整合的かつ継続的に取得でき、構造推定に必要なクロスセクション・時系列のバリエーションを確保できるためである。支出項目は総務省が定める10大分類（食料、住居、光熱・水道、家具・家事用品、被服及び履物、保健医療、交通・通信、教育、教養娯楽、その他の消費支出）に従い、このうち「光熱・水道」を基準財（Numeraire）として、これを除く9財を対象財とする。

価格指数の構築には注意を要する。総務省『小売物価統計調査』が公表する消費者物価地域差指数 d_{irt} （第 i 財・都道府県 r ・時点 t ）は、各年において都道府県平均が100となるよう基準化されている。したがって d_{irt} は都道府県間の価格差（クロスセクション方向）の情報を持つ一方、価格の時系列変動の情報を含まない。そこで、第 i 財・時点 t の全国消費者物価指数を π_{it}^{nat} とし、地域差指数にこれを乗じた地域別価格指数

$$p_{irt} = \frac{d_{irt} \pi_{it}^{\text{nat}}}{100}$$

を実証分析に用いる。これにより、基準財を第 b 財（光熱・水道）とする相対価格は

$$\frac{p_{irt}}{p_{brt}} = \frac{d_{irt} \pi_{it}^{\text{nat}}}{d_{brt} \pi_{bt}^{\text{nat}}}$$

となり、都道府県間・時系列の両方向で比較可能な相対価格インデックスが得られる。

世帯属性の地域的・時間的な異質性をコントロールするため、世帯人員 (hh_size)、世帯主年齢 (hh_age)、持家率 (homeownership_rate) を家計属性変数として投入する。実質消費支出インデックス C_t は、家計調査の支出シェアを用いた都道府県別の Törnqvist 物価指数 (2014 年基準) P_{rt}^T を構築し、名目総消費支出 E_{rt} をこれでデフレートして $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ として算出した。Törnqvist 物価指数は、隣接する 2 期の支出シェアの算術平均を対数価格相対 (log price relative) のウェイトとする連鎖型の物価指数であり、本研究では

$$\ln P_{rt}^T - \ln P_{r,t-1}^T = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2} (w_{irt} + w_{ir,t-1}) \ln \frac{p_{irt}}{p_{ir,t-1}}, \quad P_{r,2014}^T = 1,$$

として 2014 年を基準 (指数 = 1) に各年へ累積的に構成する*1。ここで w_{irt} は都道府県 r ・時点 t における第 i 財 (光熱・水道を含む全 10 分類) の支出シェア、 p_{irt} は前述の地域別価格指数である。以下では記法を簡潔にするため都道府県添字 r を省略し C_t と表記する。計量経済学的な推定に先立ち、 $\ln C_t$ およびすべての家計属性変数について、サンプル平均を差し引く平均中心化 (mean-centering) を施した。これにより、推定方程式の定数項 (財ダミーの係数) が「平均的な所得水準・世帯属性をもつ標準的な勤労者世帯」の消費選好を表すように位置づけられ、外挿バイアスによる嗜好パラメーターの歪みを排除している。

表 2 は、推計に用いた主要変数の記述統計である。Panel A は各 10 大分類の支出シェアと価格指数の平均および標準偏差を示す。日本の勤労者世帯において食料の支出シェアが最も大きく (平均 0.244)、次いでその他の消費支出 (0.198)、交通・通信 (0.163) と続き、食料が家計消費の基盤を成すことがわかる。Panel B は都道府県・年レベルに集約した変数 (実質消費支出、世帯人員、世帯主年齢、持家率) の記述統計であり、全体 (Overall)・都道府県間 (Between)・都道府県内 (Within) の標準偏差に分解して提示している。これにより、構造推定に必要な時系列およびクロスセクションの十分なバリエーションが存在することが確認できる。

*1 Diewert (1976) によれば、superlative (超越的) 指数とは、任意の二回連続微分可能な生計費 (単位費用) 関数を二次の精度で近似しうる柔軟な関数形 (flexible functional form) に対して厳密 (exact) となる指数をいう。その含意として、消費者の真の選好の具体的な関数形を知らずとも、観測される価格と支出シェアのみから真の生計費変化を二次の精度で復元できる。Törnqvist 指数は、トランスログ (translog) 型の単位費用関数に対して厳密な superlative 指数の代表例であり (Fisher 理想指数と並ぶ)、固定ウェイトの Laspeyres 指数と異なり各期の支出シェア変化を取り込むため代替バイアス (substitution bias) を構造的に緩和する。指数の原型は Törnqvist (1936)、superlative 指数としての理論的基礎は Diewert (1976)、実務的かつ包括的な解説は IMF et al. (2020) を参照されたい。

表 2 記述統計 (Summary Statistics)

Panel A: 品目レベルの変数 ($N = 517$ per item)				
分類 (Item)	支出シェア (w_{irt})		価格指数 (p_{irt} , 光熱・水道=100)	
	Mean	SD	Mean	SD
食料	0.244	0.020	100.8	7.87
その他の消費支出	0.198	0.027	101.1	2.74
交通・通信	0.163	0.026	98.1	3.03
教養娯楽	0.092	0.010	98.6	5.47
光熱・水道 (基準財)	0.072	0.010	105.6	8.60
住居	0.063	0.020	92.8	9.37
教育	0.053	0.017	100.8	9.91
保健医療	0.039	0.006	98.5	2.44
被服及び履物	0.038	0.006	100.4	5.49
家具・家事用品	0.037	0.005	101.4	7.89

Panel B: 市場・世帯レベルの変数 ($N = 517 / R = 47, T = 11$)				
変数 (Variable)	Mean	Standard Deviation		
		Overall	Between	Within
実質消費支出 (円)	306,046.5	26,162.1	20,161.2	16,907.3
世帯人員 (人)	3.29	0.154	0.092	0.124
世帯主年齢 (歳)	49.37	1.683	0.867	1.448
持家率 (%)	75.55	10.388	8.679	5.834

注: Panel A は各 10 大分類における支出シェアと価格指数の平均および標準偏差を示す。価格指数については基準年を 100 として算出したインデックスを用いている。Panel B は都道府県・年レベル (47 都道府県 \times 11 年) に集約した変数の記述統計であり、全体 (Overall)、都道府県間 (Between)、都道府県内 (Within) の標準偏差に分解して提示している。実質消費支出は、各都道府県の名目総消費支出を Törnqvist 物価指数 (2014 年基準) でデフレートした実質総消費 C_t である。

続いて、近年の急激なエンゲル係数上昇の背景にある価格環境の変化を確認する。図 2 は、家計調査の 10 大分類すべてについて、都道府県別の価格指数 p_{irt} の推移 (灰色の細線が各都道府県、赤の太線が全国平均) を示したものである。生活必需品を代表する「食料」および「光熱・水道 (エネルギー)」が、2010 年代後半から 2020 年代にかけて他の分類に比して突出した上昇トレンドを描いている点が際立つ。これらはいずれも家計にとって代替が困難な基礎的消費である。対照的に、相対的に裁量的消費の性格が強い「教育」をはじめ、他の多くの分類は安定した推移を示しており、財の性質によって直面するインフレ圧力が大きく異なっていることがうかがえる。

このような生活必需品の相対価格の急激な上昇 (価格効果) と、それに伴う実質消費支

出の目減り（所得効果）が同時に進行している事実が、近年の日本の家計の予算制約を深刻に圧迫し、基礎的消費への支出偏重を通じてエンゲル係数を押し上げる原動力となっていると考えられる。次節以降では、これら2つのメカニズムの寄与を、Non-homothetic CES 需要システムを用いて厳密に定量化していく。

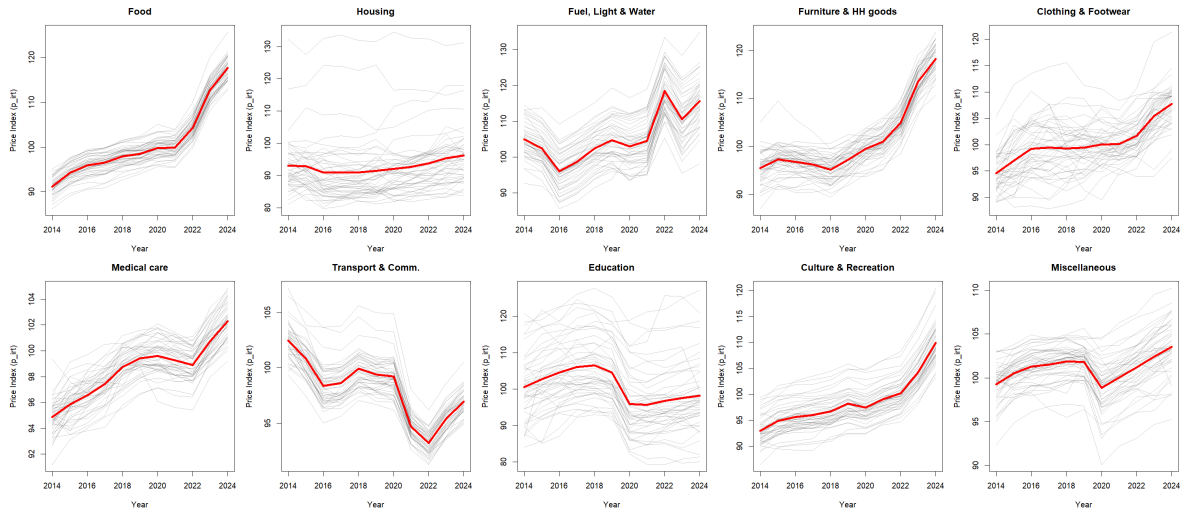


図2 10大分類の都道府県別価格指数 p_{irt} の推移（灰色：各都道府県，赤：全国平均，2014–2024年）

4.2 構造パラメーターの推定

本研究では、Comin et al. (2021) に基づく Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを適用し、標準的なホモセティック CES モデルとの比較を通じて構造パラメーターを推定する。推定標本は、ラグ操作変数（後述）の生成によって初年度（2014年）が脱落するため、9財 × 47都道府県 × 10年（2015年–2024年）の合計 $N = 4,230$ 観測である。標準誤差はすべて47都道府県を単位とするクラスター頑健標準誤差（CR2）で算出した。

4.2.1 標準的 CES モデル（ベンチマーク）

所得効果を完全に排除し、家計の需要シフトがすべて相対価格の変動（価格効果）のみに帰着すると仮定する標準的なホモセティック CES 効用関数をベンチマークとして定式化する。このモデルではすべての財における需要の所得弾力性が厳密に1に制約される。(9)に基づく、基準財 b （光熱・水道）に対する任意の財 i の対数支出シェア比の推定方

程式は以下の通りである。

$$\ln\left(\frac{w_{irt}}{w_{brt}}\right) = \sigma \ln\left(\frac{a_i}{a_b}\right) + (1 - \sigma) \ln\left(\frac{p_{irt}}{p_{brt}}\right) + \Gamma_i \mathbf{X}_{irt} + u_{irt} \quad (18)$$

ここで r は都道府県、 t は年を示し、 $c_i = \sigma \ln(a_i/a_b)$ は各財固有の切片 (Taste parameter)、 \mathbf{X}_{irt} は平均中心化済みの家計属性変数ベクトル、 Γ_i は財固有の属性効果係数、 u_{irt} は平均 0 の需要ショックである。

この推定式を最小二乗法 (OLS) で推定する場合、対数価格比 $\ln(p_{irt}/p_{brt})$ の内生性が深刻なバイアスをもたらす。第一に同時性のバイアス (Simultaneous bias) であり、ある都道府県における特定の財への一時的な需要ショック ($u_{irt} > 0$) が地域市場の支出シェア w_{irt} と価格 p_{irt} を同時に押し上げ、価格係数を上方に歪めて代替弾力性 σ を過小評価させる。第二に、家計調査の支出データから価格指数を構築する過程で不可避免的に生じる測定誤差 (Measurement error) に伴う減衰バイアスであり、価格係数をゼロ方向に縮小させる (σ を 1 に近づける)。

これらの内生性バイアスを排除し、純粋な供給側 (コストプッシュ型) の価格変動に対する家計の代替行動を識別するため、本研究では空間的 Hausman 型操作変数法 (Spatial Hausman-type IV) を導入する*2。具体的には、当該都道府県 r を除く他のすべての都道府県 ($r' \neq r$) における同時期の平均価格比を操作変数 IV_{irt} として構築する。

$$IV_{irt} = \ln\left(\frac{\frac{1}{R-1} \sum_{r' \neq r} p_{r'it}}{\frac{1}{R-1} \sum_{r' \neq r} p_{r'bt}}\right), \quad R = 47 \quad (19)$$

この操作変数は、全国共通の供給側ショック (国際的な原材料価格・為替・エネルギーコスト等) を通じて自県の価格と強く相関する一方 (関連性条件)、自県固有の需要ショック u_{irt} とは無相関である (除外制約)。第 1 段階では自県の対数価格比を操作変数と全外生変数 (家計属性・固定効果) に回帰して理論的予測値を得、第 2 段階でその予測値を用いて構造パラメーター σ を一致推定する。

*2 他市場 (本研究では他都道府県) の価格を当該市場価格の操作変数として用いる手法は Hausman 型操作変数と呼ばれ、Hausman et al. (1994) および Hausman (1996) に由来する。識別の前提は、地域横断的な価格の共変動が地域固有の需要ショックではなく全国共通の費用ショック (投入価格・流通費用等) を反映することである。この前提が全国規模の需要ショック (例: 全国的な広告・季節要因) の下で破られうる点については Nevo (2001) を参照。

4.2.2 Non-homothetic CES モデルの定式化と識別戦略

本研究の核となる NH-CES モデルでは、効用水準（実質消費インデックス）を C_t とするとき、効用関数が以下の陰関数（Implicit function）として定義される。

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma}} q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} = 1, \quad a_i > 0, \quad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1 \quad (20)$$

ここで a_i は第 i 財の相対的重要度（Taste Parameter, $\sum_i a_i = 1$ に規格化）、 σ は財間共通の代替弾力性、 ϵ_i は各財の恒常所得特性を制御するパラメーターである。(17) に基づく、基準財 b に対する任意の財 i の対数支出シェア比の推定方程式は次の通りである。

$$\ln \left(\frac{w_{irt}}{w_{brt}} \right) = \sigma \ln \left(\frac{a_i}{a_b} \right) + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{irt}}{p_{brt}} \right) + (\epsilon_i - \epsilon_b) \ln C_{rt} + \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_{irt} + u_{irt} \quad (21)$$

標準的 CES との差は第 3 項 $(\epsilon_i - \epsilon_b) \ln C_{rt}$ であり、これが非相似拡大性（所得効果）を捉える。実質消費 $\ln C_{rt}$ の内生性・測定誤差に対処するため、1 期ラグの実質消費 $\ln C_{r,t-1}$ を操作変数として用いる。9 つの財ダミーをすべて識別しダミースキップの罍を回避するため、グローバル切片を排したシステム推定を行う。したがって価格項 $\ln(p_{irt}/p_{brt})$ とラグ実質消費との交差項 $\ln C_{r,t-1} \times$ 財ダミーの計 10 本を除外操作変数とする、ちょうど識別（just-identified）の 2 段階最小二乗推定である。

4.2.3 固定効果仕様と識別の非対称性

式 (21) の推定にあたっては、空間的な固定効果（FE）の選択が所得側パラメーター $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ と価格側パラメーター σ とで相反する作用を持つことが判明した。この非対称性は本研究の識別戦略の中核をなすため、加法的な都道府県 FE（pref、47 ダミー）、地方ブロック FE（region、9 ブロック；表 3）、FE なし（none）の 3 仕様を比較する。

第一に、所得側 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ の識別である。加法的な都道府県 FE は、両側を都道府県平均で内部変換する際に、9 本の効用交差項 $\ln C_{rt} \times$ 第 i 財ダミーのすべてに共通成分 $-\frac{1}{J} \overline{\ln C_r}$ (J は財数) を注入する。この共通成分は 9 本の交差項を相互に正に相関させ、結合としては有意でも個別の ϵ_i を分離不能にする多重共線性を生む。実際、都道府県 FE 仕様では結合 Wald 検定が $\chi^2(9) = 94.74$ ($p = 1.8 \times 10^{-16}$) と圧倒的に有意であるにもかかわらず、個別に有意な係数は皆無であり、しかも点推定の符号配列が経済的に転倒する（食料・家具が負、すなわちエネルギーより奢侈という不整合）。これに対し FE を地方ブロックに粗くする、あるいは外すと、9 本の交差項はほぼ直交するブロックとなり、経済的に整合的な ϵ_i が個別有意に回復する。

表3 都道府県と地方ブロックの対応 (region 固定効果, 9 ブロック)

地方ブロック	都道府県数	都道府県
北海道	1	北海道
東北	6	青森・岩手・宮城・秋田・山形・福島
関東	9	茨城・栃木・群馬・埼玉・千葉・東京・神奈川・山梨・長野
北陸	4	新潟・富山・石川・福井
東海	4	岐阜・静岡・愛知・三重
近畿	6	滋賀・京都・大阪・兵庫・奈良・和歌山
中国	5	鳥取・島根・岡山・広島・山口
四国	4	徳島・香川・愛媛・高知
九州・沖縄	8	福岡・佐賀・長崎・熊本・大分・宮崎・鹿児島・沖縄
計	47	

第二に、価格側 σ の識別である。基準財である光熱・水道の都道府県横断的なシェアは気候要因に強く規定されており、空間的 Hausman 操作変数は自県固有の需要ショックを除去できても、こうした時不変の都道府県固有異質性を完全には除去できない。したがって空間統制を粗くするほど、この交絡成分が誤差から価格比へ回帰し、 $\hat{\sigma}$ が単調にドリフトする (表 4)。 σ に関しては、最も交絡統制の厚い都道府県 FE 仕様が相対的に信頼できる。

このように、所得側は FE を外すこと、価格側は FE を残すことが望ましいという相反する要請に対して、本研究は折衷点として地方ブロック FE (region) を主推定に採用する。この仕様では ϵ_i が経済的に整合的かつ個別に概ね有意に回復し (後述の表 5)、 σ も極端な値をとらない。価格側を過剰統制する都道府県 FE 仕様では σ が識別されない一方、識別される region ($\hat{\sigma} = 0.427$) と none ($\hat{\sigma} = 0.428$) では σ はほぼ一致し、いずれも $\sigma < 1$ (粗補完) を満たす。後続の要因分解において、所得チャンネルは $\bar{\epsilon} = 1$ により σ に不変、価格チャンネルは $(1 - \sigma)$ に比例するため、価格効果が所得効果を上回るという定性的順序は推定された σ の近傍で安定である。両効果の大小が反転するには σ が 0.9 近傍まで上昇する必要があり、実際の推定値 0.427 から大きく乖離する。

4.2.4 構造パラメーターの復元とマクロ整合的規格化

線形回帰で推定された価格比係数 $\beta_p = 1 - \sigma$ から、共通の代替弾力性 $\sigma = 1 - \beta_p$ が一意に定まる。各財ダミーの推定係数 c_i は理論上 $c_i = \sigma \ln(a_i/a_b)$ の構造を持つため、

表 4 固定効果仕様の比較 (NH-CES, 2SLS, CR2)

仕様	$\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$	第 1 段 F	結合 Wald $\chi^2(9)$	p 値	個別有意 ϵ_i
都道府県 FE (pref)	-0.05 [†]	1477.5	60.38	1.1×10^{-9}	0 / 9
地方ブロック FE (region、主推定)	0.427	1137.1	80.23	1.5×10^{-13}	4 / 9
FE なし (none)	0.428	468.7	80.56	1.3×10^{-13}	3 / 9

注: $\hat{\sigma}$ は価格比係数 $\hat{\beta}_p$ から $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ として算出。第 1 段 F は価格操作変数 (空間的 Hausman IV) に関する条件付き第 1 段の頑健 F 値。結合 Wald は帰無仮説 $H_0: \forall i, \epsilon_i - \epsilon_b = 0$ の検定。個別有意 ϵ_i は $|t| > 1.96$ となる相対所得係数の本数 (全 9 本中)。都道府県 FE 仕様は結合有意 ($\chi^2(9) = 60.38$) だが個別 0/9 であり、多重共線性の典型的兆候を示す。[†] 都道府県 FE 仕様では価格比係数 $\hat{\beta}_p$ の標準誤差が大きく (1.67)、 σ は識別されない (点推定 -0.05 は実質的に無意味であり、過剰統制によるもので弱操作変数ではない)。

嗜好パラメーター a_i を復元する際は指数変換前に σ で除する ($a_i \propto \exp(c_i/\sigma)$)。

また、データから推定される所得係数は常に基準財との相対差 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) のみであり、絶対水準を恣意的に固定すると局所的な需要の単調性 (Well-behaved condition) が失われうる。これを避けるため、本研究では Comin et al. (2021) に従い、各都道府県・期間の支出シェアで加重平均した社会全体の恒常所得特性を 1 とする規格化 (Macro-consistent normalization) を採用する。

$$\sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i = \bar{\epsilon} = 1 \quad (22)$$

このとき名目所得 Y_t に対する各財の需要の所得弾力性 η_i は次式で与えられる。

$$\eta_i = \frac{dq_{it}/q_{it}}{dY_t/Y_t} = (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} + 1 \quad (23)$$

$\bar{\epsilon} = 1$ の制約下では乗数項 $\frac{\sigma-1}{\sigma-\bar{\epsilon}}$ が厳密に 1 となり、所得弾力性は $\eta_i = \epsilon_i$ という頑健な関係に単純化される。すなわち η_i は乗数経由では σ に依存しない。

主推定 (region, $\hat{\sigma} = 0.427$) から復元した構造パラメーターを表 5 に示す。規格化後の加重平均は構成上 $\bar{\epsilon} = 1.000$ であり、基準財 (光熱・水道) の絶対水準は $\epsilon_b = 0.405$ と識別された。所得弾力性 η_i の序列は経済的に整合的である。教育 ($\eta = 2.51$) が最も強い奢侈財として振る舞い、被服及び履物 (1.83)・教養娯楽 (1.60) がこれに続く。その他の消費支出 (1.05) はおおむね所得中立的である。一方、保健医療 (0.92)・交通・通信 (0.85)・住居 (0.73)・食料 (0.70)・家具家事用品 (0.57)、および基準財の光熱・水道 (0.41) はいずれも $\eta < 1$ の必需財であり、とりわけ光熱・水道・家具・食料が強い必需品特性を示す。非相似拡大性は結合 Wald 検定 ($\chi^2(9) = 80.23, p = 1.5 \times 10^{-13}$) により頑健に支持される。個別の有意性を wild クラスタ・ブートストラップで評価すると、相対所得特性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) は 5 財 (教育・被服及び履物・教養娯楽・その他の消費支出・保

健医療)で0と有意に異なる(表6)。さらに、必需財・奢侈財の区別に直結する絶対水準の検定では、教育・被服及び履物・教養娯楽が有意に $\eta > 1$ 、食料・家具家事用品が有意に $\eta < 1$ である。とりわけ食料は $\eta_{\text{食料}} = 0.696$ (honest 95% 信頼区間 [0.440, 0.951], $P(\eta < 1) = 0.993$)と有意に必需財であり、エンゲルの法則と整合する。この食料の必需性が、後段(第4.4節)で定量化するエンゲル係数の所得チャンネルの基礎を与える。

表5 構造パラメーター推定結果(主推定: 地方ブロック FE, $\hat{\sigma} = 0.427$, $\bar{\epsilon} = 1.000$)

分類 (Item)	嗜好 a_i	相対 $\epsilon_i - \epsilon_b$	絶対 ϵ_i	所得弾力性 $\eta_i (= \epsilon_i)$
教育	0.011	2.102	2.507	2.507
被服及び履物	0.006	1.424	1.829	1.829
教養娯楽	0.046	1.196	1.602	1.602
その他の消費支出	0.260	0.648	1.053	1.053
保健医療	0.006	0.513	0.918	0.918
交通・通信	0.174	0.441	0.847	0.847
住居	0.019	0.329	0.734	0.734
食料	0.450	0.291	0.696	0.696
家具・家事用品	0.005	0.167	0.572	0.572
光熱・水道(基準財)	0.023	0.000	0.405	0.405

注: 所得弾力性の降順に並べた。嗜好 a_i は $a_i \propto \exp(c_i/\hat{\sigma})$ を和1へ規格化した値。相対所得特性 $\epsilon_i - \epsilon_b$ は基準財(光熱・水道)に対する差。絶対 ϵ_i はマクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ の下で復元した水準。 $\bar{\epsilon} = 1$ のとき $\eta_i = \epsilon_i$ 。

4.2.5 識別の頑健性

所得側パラメーターの識別頑健性を、 σ への依存性と honest な推論の二点から確認する。

第一に、 $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化の下では絶対水準の所得弾力性が $\eta_i = \epsilon_i$ となり、乗数 $(\sigma - 1)/(\sigma - \bar{\epsilon}) \equiv 1$ が恒等的に消える。したがって所得弾力性 η_i は σ に依存せず、その解釈に σ の値を要しない。実際、主推定(region, $\sigma = 0.427$)と価格側を含まない仕様(none, $\sigma = 0.428$)の σ はほぼ一致し、都道府県 FE 仕様が価格側の過剰統制によって σ を識別し得ない場合であっても、所得側の弾力性序列(教育を最強の奢侈財、食料・エネルギーを必需財とする)はこれに左右されない*3。

第二に、honest な推論である。本研究の主推定は単一式の 2SLS であり、クラスター

*3 価格項を $(1 - \sigma) \ln(p_{irt}/p_{brt})$ のオフセットとして固定し σ を 0.42~0.66 の広いレンジで動かして相対所得特性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) を再推定しても、オフセット経由の微小な伝播を除けば各財の序列は安定し、奢侈財(教育・教養娯楽・被服)と必需財(食料・家具)の対比は全域で保たれる。

単位の構造残差を符号反転 (Rademacher) させて被説明変数を再生成する wild クラスター・ブートストラップ*4を honest な標準誤差・信頼区間の算出に用いる。*5。wild クラスター・ブートストラップによる主推定の相対所得特性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) の honest な推論結果は表 6 に示す通りである。

表 6 相対所得特性の honest 推論 (wild クラスター・ブートストラップ, 主推定 region, $B = 999$)

分類 (Item)	点推定 $\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b$	標準誤差	95% 信頼区間	有意
教育	2.102	0.537	[1.094, 3.161]	✓
被服及び履物	1.424	0.254	[0.962, 1.953]	✓
教養娯楽	1.196	0.215	[0.815, 1.610]	✓
その他の消費支出	0.648	0.295	[0.111, 1.243]	✓
保健医療	0.513	0.250	[0.057, 0.996]	✓
交通・通信	0.441	0.409	[-0.324, 1.229]	—
住居	0.329	0.314	[-0.295, 0.917]	—
食料	0.291	0.163	[-0.016, 0.615]	—
家具・家事用品	0.167	0.215	[-0.239, 0.587]	—

注: 点推定は主推定 (region) の相対所得特性。標準誤差・95% 信頼区間は $X \cdot Z \cdot$ 固定効果を固定した wild クラスター・ブートストラップ ($B = 999$, Rademacher 重み) による。有意列は 95% 信頼区間が 0 を含まないものに ✓ を付す。

加えて、相対所得特性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) を $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化により絶対水準の所得弾力性 η_i へ変換し、同じ wild クラスター・ブートストラップの各 draw 上で η_i を再構成した honest 推論を表 7 に示す。必需財・奢侈財の判定 ($\eta \geq 1$) では、教育・被服及び履物・教養娯楽が有意に奢侈財 ($\eta > 1$)、食料・家具家事用品が有意に必需財 ($\eta < 1$) となる。とりわけ本稿の所得チャネルの基礎である食料の必需性は、 $\eta_{\text{食料}} = 0.696$ (95% 信頼区間 [0.440, 0.951], $P(\eta < 1) = 0.993$) として頑健に支持される。

*4 wild クラスター・ブートストラップは、クラスター数が少数 (概ね 5~30) または各クラスターの観測数が不均一な状況で、クラスター頑健標準誤差が過小となり標準的な漸近検定が過大棄却する問題を補正する手法であり、Cameron et al. (2008) が提案した。

*5 ペア・クラスター・ブートストラップ (都道府県を復元抽出, $B = 999$) は、都道府県の重複により退化した再標本が生じ、 σ の裾が解析的 CR2 標準誤差から大きく乖離して過度に保守的になる。したがって本文の honest 推論には wild クラスター・ブートストラップを採用する。

表 7 所得弾力性 η_i の honest 推論 (wild クラスター・ブートストラップ, 主推定 region, $B = 999$)

分類 (Item)	η_i	95% 信頼区間	$P(\eta_i < 1)$	判定
教育	2.507	[1.454, 3.512]	0.003	奢侈 ✓
被服及び履物	1.829	[1.414, 2.260]	0.000	奢侈 ✓
教養娯楽	1.601	[1.336, 1.876]	0.000	奢侈 ✓
その他の消費支出	1.053	[0.672, 1.455]	0.403	—
保健医療	0.918	[0.569, 1.279]	0.678	—
交通・通信	0.847	[0.211, 1.453]	0.681	—
住居	0.734	[0.197, 1.251]	0.831	—
食料	0.696	[0.440, 0.951]	0.993	必需 ✓
家具・家事用品	0.572	[0.330, 0.809]	1.000	必需 ✓

注: $\eta_i = \epsilon_i$ の点推定・95% 信頼区間は、相対所得特性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) の wild クラスター・ブートストラップ ($B = 999$, Rademacher 重み) の各 draw に $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化を施して η_i を再構成したもの。 $P(\eta_i < 1)$ はブートストラップ分布で $\eta_i < 1$ となる割合。判定列は 95% 信頼区間が 1 を含まない場合に ✓ を付し、奢侈財 ($\eta > 1$)・必需財 ($\eta < 1$) の別を示す。基準財 (光熱・水道) は $\eta_b = \epsilon_b = 0.405$ 。

4.3 エンゲル係数変動の要因分解

構造推定で得たパラメーターに基づき、分析期間の初年である 2015 年を基準年 (Base year) とした反実仮想 (Counterfactual) シミュレーションを行い、近年のエンゲル係数上昇の要因を「価格効果 (Price Effect)」「所得効果 (Income Effect、非相似拡大性)」「人口属性効果 (Demographic Effect)」の 3 チャネルに分解する。各チャネルは当該変数のみを実績どおり変動させ、残りを基準年に固定して算出するため、三者は加法的に分離される。47 都道府県平均の食料支出シェアの推移を図 3 に、その期間内変化の分解を表 8 に示す。

まず、モデルの当てはまりを確認する。実際のデータ (Actual Data) と NH-CES モデルの予測 (NH-CES Simulation) は全期間にわたり近接して推移し、本需要システムが現実のエンゲル係数のマクロな上昇トレンドを良好に再現している (図 3)。食料シェアの実績は 2015 年の 23.27% から 2024 年の 26.64% へ +3.361 % ポイント上昇した。3 変数すべてを実績変動させた NH-CES モデルはこのうち +2.684 % ポイント (約 80%) を再現し、残差 +0.677 % ポイントは 2020 年に顕著な COVID 期の一時的変動などモデルが捉えない成分である。

次に要因分解の結果を解釈する。第一に価格効果である。実質消費と人口属性を 2015

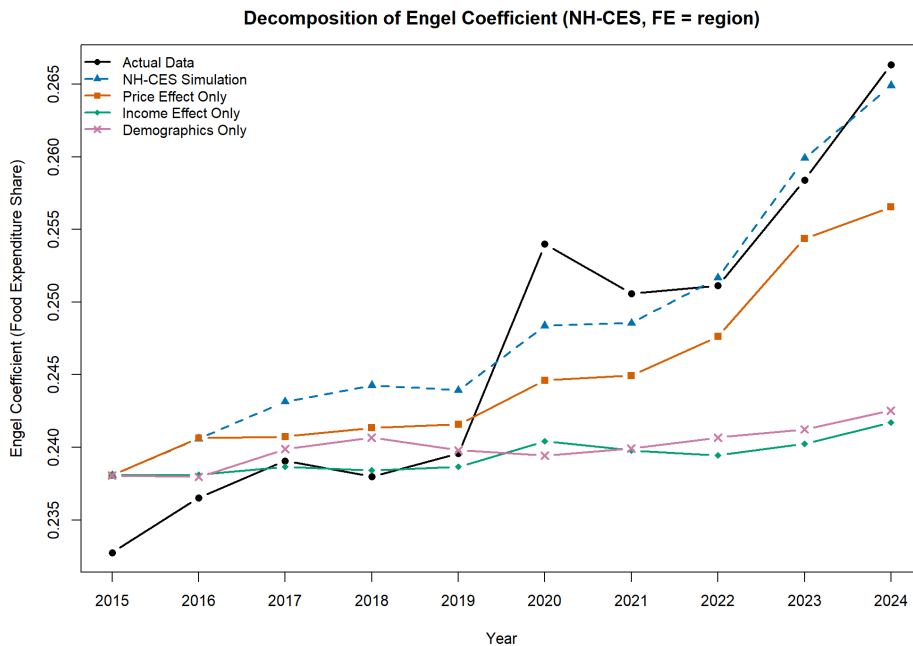


図3 近年のエンゲル係数上昇の要因分解 (Implicit NH-CES モデル, 主推定 region による反実仮想)

年に固定し相対価格のみを変動させた反実仮想 (Price Effect Only) では、食料シェアが明確な上昇トレンドを描き、期間内に +1.848 % ポイント上昇する。これはモデル総効果の 68.8% (実績変化の 55%) を占め、三チャンネルのなかで支配的である。これは前節で推定された代替弾力性 $\sigma = 0.427 < 1$ (粗補完) と整合する。すなわち、原材料インフレや円安を背景とした食料品の相対価格高騰に直面した際、家計は食料の実質消費量を価格上昇に見合うほど削減できず、この代替の困難さを通じて名目的な食料支出シェア (エンゲル係数) が押し上げられた。

第二に所得効果 (非相似拡大チャンネル) である。相対価格と人口属性を 2015 年に固定し実質総消費 C_t のみを変動させた反実仮想 (Income Effect Only) では、食料シェアは同方向 (上昇) に動くが、その期間内変化は +0.363 % ポイントにとどまる。前節で食料が有意な必需財 ($\eta_{\text{食料}} = 0.70 < 1$, $P(\eta < 1) = 0.993$) と識別された通り、実質購買力の停滞は食料シェアを押し上げる方向に作用する。ただしその寄与はモデル総効果の 13.5% (実績変化の 11%) にとどまり、価格効果には遠く及ばない。図3でも所得効果のみの系列 (Income Effect Only) はほぼ横ばいで推移している。

第三に人口属性効果である。価格と所得を 2015 年に固定し世帯人員・世帯主年齢・持家率のみを変動させた反実仮想 (Demographics Only) では、食料シェアは +0.446 %

ポイント上昇し、モデル総効果の 16.6% を占める。世帯構成の変化（世帯人員・世帯主年齢・持家率の推移）も食料シェア上昇に寄与しており、その規模は所得効果と同程度である。なお交互作用項は +0.027 % ポイント（1.0%）と無視できるほど小さく、三チャンネルがほぼ加法的に分離できることを示す。表 8 が示す通り、価格効果が他の二チャンネルを大きく上回るという順序は、所得効果が σ に不変・価格効果が $(1 - \sigma)$ に比例することから、 σ の信頼区間全域で保たれる。

表 8 食料エンゲル係数の期間内変化の要因分解（2015 年 → 2024 年, 主推定 region, $\hat{\sigma} = 0.427$ ）

チャンネル	変化 Δ (% ポイント)	モデル総効果比
価格効果 (Price)	+1.848	68.8%
所得効果 (Income)	+0.363	13.5%
人口属性効果 (Demographics)	+0.446	16.6%
交互作用 (Interaction)	+0.027	1.0%
モデル総効果 (NH-CES)	+2.684	100.0%
実績変化 (Actual, 参照)	+3.361	—
適合残差 (Actual - model)	+0.677	—

注: 2015 年基準の反実仮想による食料支出シェアの 2015→2024 年変化 (47 都道府県平均, % ポイント)。各チャンネルは当該変数のみ実績変動・他を基準年固定（世帯属性も固定）で算出。価格＝相対価格、所得＝実質総消費 C_t 、人口属性＝世帯人員・世帯主年齢・持家率。交互作用＝モデル総効果 - (価格 + 所得 + 人口属性) でシェア空間の非加法性を表す。モデル総効果は 3 変数すべてを実績変動させた予測変化、適合残差は実績変化との差で 2020 年の COVID 期等の一時変動を含む。所得効果チャンネルは σ に不変、価格効果チャンネルは $(1 - \sigma)$ に比例し、価格 > 所得の順序は σ の信頼区間全域で保たれる。

以上から本研究の発見は次の 2 点に整理される。第一に、日本の家計の需要システムは明確に非相似拡大的 (Non-homothetic) であり、所得効果を一律に 1 へ制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。教育を最強の奢侈財、食料・エネルギーを必需財とする所得弾力性の序列 (表 5・7) は、結合 Wald 検定および wild クラスタ・ブートストラップを通じて頑健に識別された。第二に、2015-2024 年のエンゲル係数上昇トレンドの主因は食料品の相対価格高騰 (価格効果, モデル総効果の 69%) であり、非相似拡大的な所得効果の寄与は穏当 (同 13.5%) で、人口属性効果 (同 16.6%) と同程度であった。

この 2 点は矛盾しない。非相似拡大性は需要システムの横断面・水準における構造的な特性であるのに対し、要因分解は特定期間の時系列変動を価格・所得・人口属性の各チャンネルへ配分する別のマージンの分析だからである。本分析期間において、相対価格の変動は実質消費や世帯構成の変動よりもエンゲル係数を強く駆動した。所得効果を構造的に表現できないホモセティック CES は、需要システムの非相似拡大的な構造そのもの (横断面

の所得弾力性の異質性)を捉えられない点で誤設定であり、本研究の NH-CES アプローチは、この構造を識別したうえで時系列のエンゲル係数変動が価格主導であったことを定量的に示した点に意義がある。

4.4 嗜好パラメーターの比較と生活費計測への含意

前節までに、(1) 支出シェアの非相似拡大性が頑健に識別され同次的な CES (ホモセティック) が棄却されること (表 5、4.2.3 節)、(2) 2015–2024 年のエンゲル係数の上昇が価格主導であり所得・非相似拡大チャネルの寄与は穏当であること (表 8) を示した。本節では、これら二つの発見が厚生計測に対してもつ含意を、標準的 CES と Non-homothetic CES (以下、NH-CES) の対比という観点から整理する。具体的には、両モデルから復元される嗜好パラメーター a_i 、それらが含意する生計費 (単位費用) 指数、および効用 (実質消費) 水準を比較し、需要システムの定式化の違いが生活費・厚生計測をどの程度変えるかを定量化する。

4.4.1 嗜好パラメーターの比較

標準的 CES と NH-CES はいずれも、推定された財別切片 \hat{c}_i と代替の弾力性 $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ から、嗜好パラメーターを

$$\hat{a}_i \propto \exp(\hat{c}_i / \hat{\sigma}), \quad \sum_{i \in \Theta} \hat{a}_i = 1 \quad (24)$$

として復元する。両モデルで \hat{a}_i が乖離する理由は二つある。第一に、推定される代替の弾力性が異なる (CES で $\hat{\sigma}_{\text{CES}} = 0.366$ 、NH-CES で $\hat{\sigma}_{\text{NHCES}} = 0.427$)。第二に、標準的 CES は所得効果 (非相似拡大性) を許容しないため、横断面における支出パターンの体系的較差を全て嗜好パラメーターに吸収させる一方、NH-CES は同じ較差の一部を生活水準への依存 ($C_t^{c_i}$ 項) に帰属させる。表 9 に両者の復元結果を対比する。

標準的 CES は、最大シェアをもつ食料への嗜好ウェイトを NH-CES より大きく評価する (0.497 対 0.450)。これは、CES が横断面の支出パターンをすべて嗜好に帰属させるため、本来は食料の必需性 ($\eta_{\text{食料}} = 0.70 < 1$ 、すなわち生活水準が上がるほど食料シェアが低下する性質) に由来する成分まで嗜好パラメーターに吸収するためである。NH-CES はこの成分を $C_t^{c_i}$ 項に分離するため、食料の嗜好ウェイトはより小さく復元され、その分が他の財にわずかに再配分される。もっとも両モデルの嗜好パラメーターの差は食料に集中し ($|\Delta a_i|$ は食料で最大の 0.047、他財はいずれも 0.011 以下)、全体としては近い。それでも両モデルは「平均的な消費バスケットがなぜそのように観察されるか」の帰属 (嗜

表9 嗜好パラメーター a_i の比較（主推定：地方ブロック固定効果, $\hat{\sigma}_{CES} = 0.366$, $\hat{\sigma}_{NHCES} = 0.427$ ）

分類 (Item)	a_i^{CES}	a_i^{NHCES}	差 Δa_i	ϵ_i
食料	0.497	0.450	-0.047	0.696
その他の消費支出	0.262	0.260	-0.002	1.053
交通・通信	0.165	0.174	+0.009	0.847
教養娯楽	0.034	0.046	+0.011	1.601
光熱・水道	0.013	0.023	+0.009	0.405
住居	0.013	0.019	+0.006	0.734
教育	0.007	0.011	+0.005	2.507
保健医療	0.003	0.006	+0.003	0.918
被服及び履物	0.003	0.006	+0.003	1.829
家具・家事用品	0.003	0.005	+0.003	0.572

注：復元式は (24)。 $\hat{\sigma}$ は各モデルの相対価格比係数から $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ として算出され、両モデルで異なる。 $\Delta a_i = a_i^{NHCES} - a_i^{CES}$ 。 ϵ_i は NH-CES の絶対所得特性 ($\bar{\epsilon} = 1$ に規格化) であり、NH-CES 列・ ϵ_i 列は表5と整合する。

好か生活水準か) において質的に異なる解釈を与える。

4.4.2 生計費（単位費用）指数への含意

両モデルの含意する生計費は、効用 1 単位を達成するための最小費用、すなわち単位費用関数で与えられる。一定の効用水準を基準として価格変化のみを評価するこの生計費比は、Konüs (1939) の真の生計費指数 (true cost-of-living index) の概念に対応する。標準的 CES では価格指数 (7) がそのまま生計費であり、効用水準に依存しない。NH-CES では支出関数 (14) を効用 C_t で除して

$$P_t^{NHCES} = \frac{E_N(p_t, C_t)}{C_t} = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \tilde{C}_t^{\epsilon_i - 1} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (25)$$

を得る（第二等号は (14) の整理による）。なお式 (25) は一般の価格ベクトル p_t について記しているが、実証では各都道府県の価格ベクトル $(p_{irt})_{i \in \Theta_t}$ で評価し、都道府県間で平均して全国生計費指数を構成する。 $\epsilon_i \equiv 1$ ならば \tilde{C}_t 項が消え (7) に一致する点が、非相似拡大性が生計費に及ぼす効果を集約している。ここで $\tilde{C}_t \equiv C_t / \bar{C}$ 、 $\bar{C} = \exp(\overline{\ln C})$ は推定時の中心化点である。これは本質的な規格化であり、推定式が中心化した $\ln C$ を説明変数としているため、復元された \hat{a}_i は $\tilde{C}_t = 1$ （標本幾何平均）における選好に対応する。生の C_t で (25) を評価すると、 $\tilde{C}_t^{\epsilon_i - 1}$ 項が最大の所得特性をもつ財に発散的な重み

を与え、含意シェアが実データと乖離して指数が退化することを確認した。なお NH-CES の生計費は効用水準に依存するため、各都道府県の 2015 年の生活水準 $\tilde{C}_{r,2015}$ に固定し価格のみを変動させた固定効用（基準効用型）コスト・オブ・リビングとして評価する*6。

表 10 および図 4 に、2015 年を 100 とする全国生計費指数を、総務省『消費者物価指数』（全国・総合）と対比して示す。2015–2024 年の累積上昇率は公式 CPI で +10.49%、標準的 CES で +9.32%、NH-CES で +9.53% である。両モデルの生計費は平穏年には近接するが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には差（NH-CES–CES）が全国平均で +0.89 ポイントに開き、その後縮小して 2024 年には +0.21 ポイントとなる。NH-CES の生計費は、各年の実支出シェアから直接構成した Törnqvist 価格指数（モデル非依存の superlative 基準）にほぼ一致する（差は全期間で 0.06 ポイント以内）一方、CES はこれを下回り、その乖離は 2022 年に約 0.95 ポイントで最大となる。すなわちホモセティック CES は、必需財価格が高騰した局面の生計費上昇を Törnqvist 価格指数に対して過小評価する*7。

注目すべきは二種類の差の関係である。第一に、推計生計費指数（CES・NH-CES）はいずれも公式 CPI を下回って推移し、2024 年でその乖離は約 1.0~1.2 ポイントに達する。第二に、ホモセティック対非相似拡大という需要構造の選択が生計費に与える差（NH-CES–CES）は、平穏年には 0.1 ポイント未満と小さいが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には +0.89 ポイントへ拡大する。この 2022 年の構造差は、同年の推計指数 – 公式 CPI 乖離（NH-CES で -0.90、CES で -1.79 ポイント）と同オーダーであり、需要システムの定式化の選択は、少なくとも必需財インフレの局面では、計測側の選択（算式・品目バスケット・標本範囲）に匹敵する大きさを生計費計測に影響しうる*8。

*6 実際の \tilde{C}_t 経路で評価する Paasche 型では、実質消費の低下が必需財 ($\epsilon_i < 1$) を $\tilde{C}_t^{\epsilon_i-1}$ 項を通じて相対的に上方加重するため、全国指数は固定効用型よりやや高く出る。差は実質消費が低下する後年ほど拡大し、2024 年で最大 +0.10 ポイントである。これは基準効用の選択という指数算式上の差であり、本節の CES 対 NH-CES 比較（両系列とも固定効用で構成）には影響しない。

*7 この過小評価は推定パラメーターの選択に依存しない。観測支出シェアと価格のみから構成され構造パラメーター (a_i, σ) を一切用いない Sato-Vartia 指数は、ホモセティック CES 選好の下では真の CES 生計費比に厳密に一致する (Sato, 1976; Vartia, 1976) (CES 厳密価格指数の実証的活用は Feenstra, 1994)。本データで計算すると、Sato-Vartia 指数は Törnqvist 価格指数と全期間で 0.04 ポイント以内で一致し、構造 CES の COLI はそのいずれをも下回る (2024 年で約 0.23、2022 年で約 0.96 ポイント)。仮にホモセティック CES が正しければ Sato-Vartia 指数は構造 CES の COLI に一致するはずであり、両者の乖離はそれ自体が非相似拡大のモデル非依存な証左である。したがって CES によるインフレ局面の生計費過小評価は、推定値ではなくホモセティックという関数形の制約に起因する。

*8 推計生計費指数と公式 CPI の乖離には、連鎖型 superlative 指数と公式 CPI の基準バスケット、10 大分類への集約、標本範囲（本データは二人以上の勤労者世帯）といった算式・カバレッジの差が寄与すると考えられる。

表 10 生計費指数 (2015 年 = 100, 全国) : 公式 CPI とモデル COLI の比較

年	公式 CPI	CES COLI	NH-CES COLI	Törnqvist	NH-CES-CES
2015	100.00	100.00	100.00	100.00	0.000
2016	99.90	100.31	99.85	99.86	-0.455
2017	100.41	100.72	100.42	100.43	-0.300
2018	101.32	101.52	101.42	101.42	-0.102
2019	101.83	101.76	101.80	101.81	+0.038
2020	101.83	101.06	101.01	101.04	-0.052
2021	101.63	100.77	100.85	100.87	+0.076
2022	104.18	102.39	103.28	103.34	+0.894
2023	107.54	106.45	106.53	106.56	+0.075
2024	110.49	109.32	109.53	109.57	+0.209

注: 公式 CPI は総務省『消費者物価指数』全国・総合 (2015 年基準)。CES・NH-CES は (7)・(25) の単位費用を各都道府県で 2015 年 = 100 に基準化し都道府県平均をとった固定効用 COLI。Törnqvist は各年の実支出シェアから構成したモデル非依存の superlative 指数。累積上昇率は公式 CPI +10.49%、CES +9.32%、NH-CES +9.53% で、推計生計費指数 (CES・NH-CES) はいずれも公式 CPI を下回る。NH-CES は Törnqvist にほぼ一致 (差は 0.06 ポイント以内) する一方 CES は下回り、その乖離は NH-CES-CES で 2022 年に +0.894 ポイントで最大となる。

公式 CPI のバイアス計測は物価指数理論の中心的主題であり、その包括的な解説は 阿部 (2023) にまとめられている。とりわけ同書第 12 章はエンゲルカーブを用いた物価計測を主題としており、公式 CPI と需要システムに基づく生計費指数を対照する本節の試みと問題意識を共有する。

4.4.3 効用 (実質消費) 水準への含意

最後に、両モデルが観測された (Y_t, p_t) をどのような効用水準として評価するかを比較する。標準的 CES では効用は閉形式 $U_t^{\text{CES}} = Y_t/P_t^{\text{CES}}$ で与えられる。NH-CES では Comin et al. (2021) の指摘どおり間接効用関数が解析的に解けないため、支出関数 (14) を C_t について数値的に求解する必要がある。すなわち、所与の (Y_t, p_t) と構造パラメーターの下で

$$Y_t = C_t \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} (C_t/\bar{C})^{\epsilon_i-1} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (26)$$

を満たす $C_t > 0$ を一次元求根法 (uniroot) で解く。(26) の右辺は C_t について単調増加であり解は一意である。ただし効用の絶対水準は価格指数の規格化と \bar{C} の選択に依存し識別されないため、2015 年全国値で規格化した $u_t \equiv C_t/C_{2015}$ を直接求解し、時系列

Official CPI (national) vs CES vs NH-CES vs Tornqvist

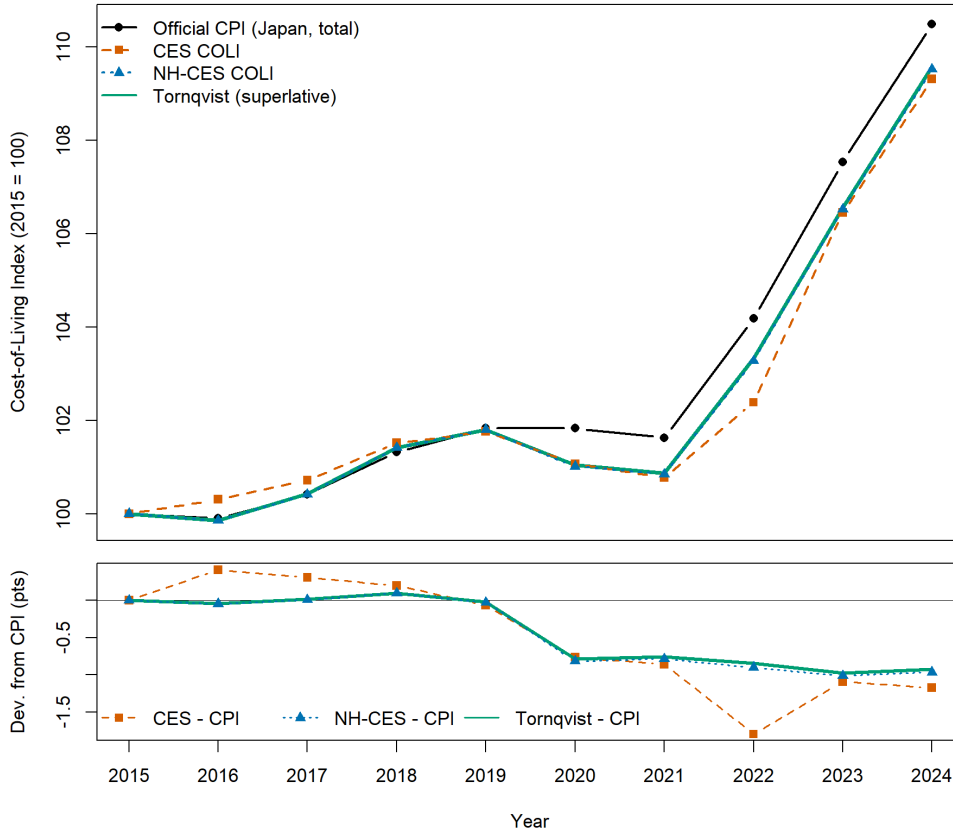


図4 生計費指数 (COLI) の比較：公式 CPI (総務省『消費者物価指数』全国・総合)・CES・NH-CES・Törnqvist 価格指数 (2015 年 = 100)。上段は水準、下段はモデル非依存な superlative 指数 (Törnqvist 価格指数) からの乖離 (指数ポイント、0 線が Törnqvist 価格指数)。推計生計費指数 (CES・NH-CES) は上段で一貫して公式 CPI を下回る (2024 年で約 $-1.0 \sim -1.2$ ポイント)。下段では、NH-CES が Törnqvist 価格指数にほぼ一致する (± 0.06 以内) 一方、ホモセティックな CES は食料・エネルギーが高騰した 2022 年に Törnqvist 価格指数を約 0.95 ポイント下回り、インフレ局面で生計費を過小評価することが直接見てとれる。

インデックスとして提示する。

表 11 および図 5 が示すとおり、名目支出が 2015–2024 年に $+4.3\%$ 増加する一方、両モデルが含意する実質消費 (効用) 水準は約 5% 低下した (2024 年で CES -4.83% 、NH-CES -4.97%)。構造モデルに依存しない指標として名目支出 Y を連鎖 Törnqvist 価格指数で除した実質消費も、2024 年に $95.2 (-4.8\%)$ まで低下しており、両モデルの効用水準とほぼ一致する (図 5 上段)。すなわち名目支出の伸びは生計費の上昇 ($+9 \sim 10\%$) に吸収され、家計の実質購買力はむしろ縮小している。これは「はじめに」で示し

表 11 効用（実質消費）水準（2015 年 = 100, 全国）

年	名目支出 Y	CES 効用	NH-CES 効用	NH-CES-CES
2015	100.000	100.000	100.000	0.000
2016	99.834	99.969	99.988	+0.020
2017	99.745	99.324	99.337	+0.013
2018	100.992	99.584	99.587	+0.003
2019	101.034	99.247	99.240	-0.007
2020	97.885	96.884	96.831	-0.053
2021	98.538	97.703	97.664	-0.039
2022	101.351	98.145	98.069	-0.076
2023	103.458	97.093	97.025	-0.068
2024	104.270	95.175	95.032	-0.142

注：全国は都道府県平均の価格・名目支出で集計。CES は $U_t = Y_t/P_t^{\text{CES}}$ 、NH-CES は (26) を `unroot` で数値求解。効用の絶対水準は識別されないため 2015 年 = 100 に基準化した。

たエンゲル係数の近年の上昇（図 1）と整合的であり、実質購買力の縮小が必需財である食料の支出シェアを押し上げるという本研究のメカニズムと符合する。ホモセティック対非相似拡大という定式化の違いが効用水準計測に与える差（NH-CES-CES）は、必需財インフレの 2022 年以降に拡大し、2024 年には -0.14 インデックスポイントに達する。これは効用インデックスが定義上 Y_t 指数を各モデルの生計費指数で除したものに等しいことから、生計費の比較（表 10）における 2022 年以降の NH-CES-CES 乖離の拡大と表裏一体の結果である。

4.4.4 小括

以上の比較は、本論文の二つの中心的発見が厚生計測の側面でどのように現れるかを整理する。非相似拡大性は横断面・水準における頑健な構造的特徴であり（表 5、4.2.3 節でホモセティックな CES は統計的に棄却される）、嗜好パラメーターの帰属において CES と NH-CES は質的に大きく異なる。この構造の違いは生計費・厚生計測にも現れる。NH-CES の生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数（Törnqvist）をほぼ完全に近似する一方、CES はこれを下回り、その乖離は食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年に約 0.95 ポイントで最大となる（NH-CES-CES で +0.89 ポイント）。効用（実質消費）水準の評価差も 2024 年には -0.14 ポイントへ拡大した。すなわち、ホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費上昇を過小評価しており、非相似拡大チャネルは厚生計測の上で一平穏な年には目立たないものの——コスト高局面でこそ顕在化

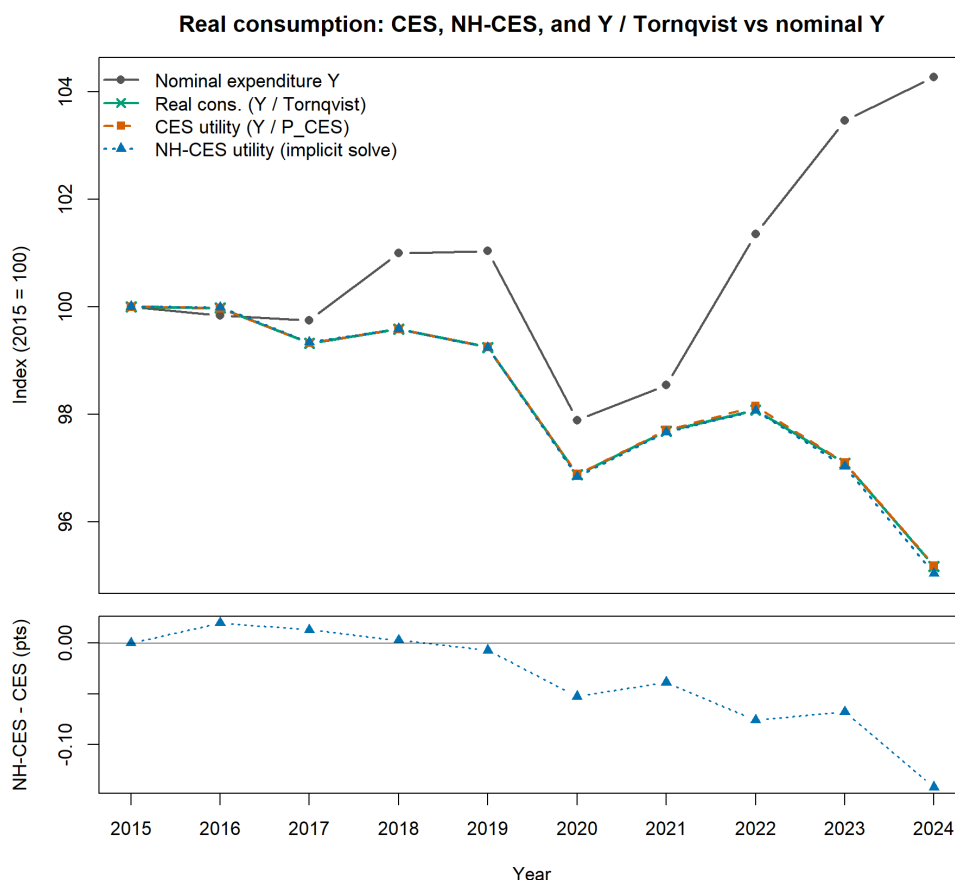


図5 効用（実質消費）水準の比較（2015年＝100，全国）。上段は名目支出 Y、Y を連鎖 Törnqvist 価格指数で除したモデル非依存の実質消費、および両モデルの効用水準、下段は NH-CES-CES の差（指数ポイント）。名目支出は 2024 年までに +4.3% 増加するが、Törnqvist 実質消費・CES 効用・NH-CES 効用はいずれも約 5% 低下し（2024 年でそれぞれ 95.2・95.2・95.0）ほぼ一致する。両モデルの効用差は 2022 年以降拡大して 2024 年に -0.14 ポイントとなる。

する。

この厚生面の発見は、時系列のエンゲル係数分解が価格主導であった（所得チャネルの寄与が穏当であった）こととも矛盾しない。エンゲル係数分解は食料の「支出シェア」が実質消費の変動にどう応答するか（必需性 $\eta = 0.70$ を通じた時系列の所得チャネル）を問うのに対し、生計費比較は同一の価格変動を、非相似拡大的な需要構造（ $\tilde{C}_t^{\epsilon_i - 1}$ による重み付け）がホモセティック CES とどう異なって評価するか（横断面・水準の構造チャネル）を問うものである。前者では価格効果が支配的となったが、後者では食料・エネルギーが高騰した局面で CES と NH-CES の生計費指数に無視できない乖離が生じる。所

得チャンネルによる食料シェアの穏当な押し上げも、両定式化の生計費指数の乖離も、本データ期間に実質消費が約 5% 低下し、かつ食料・エネルギー価格が他財より強く上昇したという同じ事実を、異なる経路を通じて映し出したものである。

5 ディスカッション

本研究の実証結果は、近年の日本経済が直面する「物価高と実質賃金低下の併存」が、家計の厚生や消費構造にどれほど深刻な歪みをもたらしているかを定量的に浮き彫りにした。ここでは、抽出された構造パラメーターの分布とシミュレーション結果に基づき、政策的インプリケーションおよび本研究の限界について議論する。

第一に、マクロ経済政策に対する含意である。長らく日本において、エンゲル係数の上昇は「食料品価格の相対的な高騰（外部ショック）」や「食の外部化・高級化」といった要因で語られることが多かった。本研究の要因分解は、2015 年–2024 年のエンゲル係数上昇に関する限り、その主因が食料品の相対価格高騰（価格効果）であり、財の代替が困難（ $\sigma < 1$ ）なために名目食料支出シェアが押し上げられたことを定量的に示した。したがって、当面のエンゲル係数上昇という現象に対しては、食料・エネルギーの相対価格や全般的なインフレへの対処が、その近接的な駆動要因に直接働きかけることになる。

同時に、本研究は日本の需要システムが頑健に非相似拡大的であること——食料が必需財（所得弾力性は約 0.7）、教育や教養娯楽が奢侈財（同 1 超）であること——を識別した。この構造の下では、実質購買力の低下は、たとえ当該期間のトレンドへの寄与が穏当であったとしても、本質的には食料などの必需品消費へ予算を偏らせ、教育・教養娯楽といった裁量的消費や人的資本投資を圧迫する方向に作用する。本分析期間における所得効果の量的寄与が穏当（モデル総効果の約 14%）にとどまったのは、実質消費が約 5% 低下したものの、食料の必需性が穏当（ $\eta = 0.70$ ）であり、実質消費の低下が食料シェアにもたらす押し上げが量的に小さいことの反映である。より大きな、あるいは持続的な実質所得の低下局面では、この非相似拡大的なチャンネルがさらに顕在化しうる。それゆえ政策的には、相対価格の歪みへの対処に加え、実質賃金の持続的な向上を通じて家計の購買力を底支えすることが、消費配分の質と厚生の観点から引き続き重要である。

第二に、長期的な経済成長への含意である。本研究の推定において、教育や教養娯楽の恒常所得特性パラメーターは有意に高く（教育の所得弾力性は約 2.5）、これらが強い奢侈財として振る舞うことが確認された。この非相似拡大的な構造は、実質購買力が低下する局面において、これらの財への支出シェアが構造的に縮小しうることを含意する。次世代への教育投資や文化・イノベーションへの支出がマクロレベルで先細りする可能性は、日

本の長期的な潜在成長率を押し下げる負の連鎖（Vicious cycle）の懸念につながる。ただし、本分析期間（2015-2024年）に関する限り、こうした奢侈財シェアの縮小が時系列的に大きく顕在化したわけではなく、これは前述の通り所得効果の当該期間における寄与が穏当であったことと整合的である。

第三に、生計費および厚生計測への含意である。本研究の推定パラメーターを用いて標準的 CES と NH-CES の生計費（単位費用）指数と効用水準を試算・比較すると（表 9、10、11）、両モデルは平均的消費バスケットの帰属——食料への嗜好ウェイトは CES で 0.50、NH-CES で 0.45 と乖離する——において質的に異なる解釈を与える。この構造の違いは生計費・厚生計測にも現れる。NH-CES の生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数（Törnqvist）をよく近似する一方、CES はこれを下回り、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には NH-CES の生計費が CES を +0.89 ポイント上回る。効用水準の評価差も 2024 年には -0.14 ポイントへ拡大する。すなわちホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費上昇を過小評価する。この需要構造に起因する差は、平穏な年には小さいものの、2022 年には推計生計費指数と公式 CPI の乖離と同オーダーに達し、従来想定されたほど無視できるものではない。なお名目支出の伸び（+4.3%）は生計費上昇に吸収され、実質消費（効用）水準は当該期間に約 5% 低下した。両モデルの厚生評価の乖離は必需財インフレ局面で最も大きく、より大きな実質所得変動や所得階層間の異質性を考慮した分析では、非相似拡大チャネルがさらに顕在化しうる点に留意が必要である。

なお、推計生計費指数（CES・NH-CES）は公式 CPI を下回って推移し、2024 年でその乖離は約 1.0~1.2 ポイントに達する。この計測側の乖離（指数算式・品目バスケット・標本範囲の差に起因）と、需要構造の選択に起因する差（2022 年で +0.89 ポイント）は同オーダーであり、厚生計測においては需要システムの定式化と価格指数の構築方法の双方への注意が要請される。

最後に、本研究の限界と今後の課題について付記する。本研究は、都道府県レベルのパネルデータおよび集計された地域差物価指数を用いた「代表的家計（Representative agent）」の枠組みに立脚している。しかし、Non-homothetic な選好の性質上、実質所得低下に伴うエンゲル係数の押し上げ圧力は、限界消費性向が異なり予算制約が厳しい低所得層において非線形により強く発現するはずである。今後は『家計調査』の個票データ（マイクロデータ）を用い、世帯の所得階層別や世帯類型別の異質性（Heterogeneity）を考慮した需要システムの推定を行うことで、物価高と所得低下がもたらす格差拡大のメカニズムをさらに精緻に解明することが求められる。

6 結語

本研究は、近年の日本における食料品エンゲル係数の上昇要因を、マクロ経済学の構造転換論で標準的に用いられる Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを応用することで、「価格効果」と「所得効果」に要因分解した。

空間的 Hausman 型操作変数法 (IV) を用いたパネルデータ分析の結果、本研究は2つの結論を得た。第一に、日本の家計の需要システムは頑健に非相似拡大的であり、地方ブロック固定効果による主推定では結合 Wald 検定がホモセティック制約を強く棄却した。教育・被服・教養娯楽を有意な奢侈財、食料・家具を有意な必需財とする所得弾力性の序列は wild クラスタ・ブートストラップに支持され、すべての財の所得弾力性を1に制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。第二に、2015年から2024年のエンゲル係数上昇の要因分解では、その主因は食料品の相対価格高騰時でも代替が困難であるという相対価格効果であり、モデル総効果の約69%を占めた。非相似拡大的な所得効果も同方向に作用するが、その寄与は穏当(同13.5%)で、世帯構成の変化(人口属性効果、同16.6%)と同程度であった。非相似拡大性という需要の構造的特性と、価格主導であった時系列のエンゲル係数上昇とは、別個のマージンの事実として両立する。

さらに、両モデルの生計費指数と効用水準を試算・比較したところ、名目支出の伸びは生計費上昇に吸収され、実質消費は当該期間に約5%低下した。NH-CESの生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数 (Törnqvist) をよく近似する一方、CESはこれを下回り、食料・エネルギー価格が高騰した2022年にはNH-CESがCESを+0.89ポイント上回った。すなわちホモセティックCESがインフレ局面の生計費を過小評価することが示された。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数上昇が価格主導であったことと別の分析マージンに属し、両者は整合的である。需要構造の選択が生計費計測に及ぼす影響は——とりわけインフレ局面では——計測側の選択(指数算式・データ範囲)と同オーダーであり、今後の厚生計測において需要システムの定式化と価格指数の構築方法の双方への留意が重要であることを示唆している。

19世紀にエルンスト・エンゲルが見出した、所得水準と食料費シェアの間の負の関係は、本研究の構造推定においても、日本の家計需要の頑健な特性として確認された(食料は明確な必需財である)。もっとも、近年のエンゲル係数の急上昇という現象そのものは、この所得チャンネルよりも、食料品の相対価格高騰によって主に駆動されていた。いずれにせよ、エンゲル係数の動向とその背後にある需要構造は、国民の生活水準と消費配分を映すシグナルとして依然として有効な分析対象であることを、本稿の結果は再確認するもの

である。

参考文献

- Atkin, D., Faber, B., Fally, T., & Gonzalez-Navarro, M. (2024). "Measuring Welfare and Inequality with Incomplete Price Information". *The Quarterly Journal of Economics*, 139(1), 419–475.
- Cameron, A. C., Gelbach, J. B., & Miller, D. L. (2008). "Bootstrap-Based Improvements for Inference with Clustered Errors". *The Review of Economics and Statistics*, 90(3), 414–427.
- Comin, D., Lashkari, D., & Mestieri, M. (2021). "Structural Change With Long-Run Income and Price Effects". *Econometrica*, 89(1), 311–374.
- Deaton, A., & Muellbauer, J. (1980). "An Almost Ideal Demand System". *The American Economic Review*, 70(3), 312–326.
- Diewert, W. E. (1976). "Exact and Superlative Index Numbers". *Journal of Econometrics*, 4(2), 115–145.
- Feenstra, R. C. (1994). "New Product Varieties and the Measurement of International Prices". *The American Economic Review*, 84(1), 157–177.
- Hanoch, G. (1975). "Production and Demand Models with Direct or Indirect Implicit Additivity". *Econometrica*, 43(3), 395–419.
- Hausman, J., Leonard, G., & Zona, J. D. (1994). "Competitive Analysis with Differentiated Products". *Annales d'Économie et de Statistique*, (34), 159–180.
- Hausman, J. A. (1996). "Valuation of New Goods under Perfect and Imperfect Competition". In T. F. Bresnahan & R. J. Gordon (Eds.), *The Economics of New Goods* (pp. 207–248). University of Chicago Press.
- Houthakker, H. S. (1957). "An International Comparison of Household Expenditure Patterns, Commemorating the Centenary of Engel's Law". *Econometrica*, 25(4), 532–551.
- International Monetary Fund, International Labour Organization, Organisation for Economic Co-operation and Development, Eurostat, United Nations Economic Commission for Europe, & World Bank (2020). *Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods*. Washington, D.C.: International Monetary Fund.
- Konüs, A. A. (1939). "The Problem of the True Index of the Cost of Living". *Econometrica*, 7(1), 10–29.

- Matsuyama, K. (2019). "Engel's Law in the Global Economy: Demand-Induced Patterns of Structural Change, Innovation, and Trade". *Econometrica*, 87(2), 497–528.
- Nevo, A. (2001). "Measuring Market Power in the Ready-to-Eat Cereal Industry". *Econometrica*, 69(2), 307–342.
- Sato, K. (1976). "The Ideal Log-Change Index Number". *The Review of Economics and Statistics*, 58(2), 223–228.
- Törnqvist, L. (1936). "The Bank of Finland's Consumption Price Index". *Bank of Finland Monthly Bulletin*, 16(10), 1–8.
- Vartia, Y. O. (1976). "Ideal Log-Change Index Numbers". *Scandinavian Journal of Statistics*, 3(3), 121–126.
- 阿部修人 (2023). 『物価指数概論：指数・集計理論への招待』．日本評論社.
- 阿部修人・稲倉典子・外木暁幸 (2026). 「近年の米価格上昇とその需要システムの分析」．*RCESR Discussion Paper Series*, No. DP26-1. 一橋大学経済研究所経済社会リスク研究機構.
- 小嶋大造・大澤秀暁・村上太郎・福島宏祐・小池孝英 (2017). 「食料価格上昇局面における家計消費とエンゲル係数：所得階層別の変化要因の分析」．*KIER Discussion Paper*, No. 1706, 1–33. 京都大学経済研究所.
- 竹内悠大・住本雅洋 (2020). 「エンゲル係数変動の要因分析」．『農業経済研究』, 91(4), 466–471.