
RCESR Discussion Paper Series

Non-homothetic CES 型効用関数を用いた 日本のエンゲル係数の分析

2026 年 9 月

外木暁幸
東洋大学経済学部

RCESR

一橋大学 経済研究所
経済社会リスク研究機構

〒186-8603 東京都国立市中 2-1
<http://risk.ier.hit-u.ac.jp/>

Non-homothetic CES 型効用関数を用いた 日本のエンゲル係数の分析 *

外木暁幸[†]

2026 年 9 月

概要

近年の日本において、生活水準の古典的な指標であるエンゲル係数が急激な上昇傾向を示している。本研究は、この現象を食料品の「相対価格の上昇（価格効果）」と「実質消費の低下（所得効果）」の 2 つの要因に厳密に分解し、定量的に解明することを目的とする。分析の枠組みとして、マクロ経済学の構造転換論で近年注目を集める Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを導入し、日本の都道府県別・10 大分類パネルデータ（2014 年–2024 年）に適用した。価格比の内生性を排除するため、他都道府県の平均価格を用いた空間的 Hausman 型操作変数法 (IV) による 2SLS 推定を実施し、マクロ整合的規格化（需要の総支出弾力性の財間の加重平均値は 1）を通じて効用関数の単調性を満たす構造パラメーターを識別した。

推定の結果、本研究は 2 つの発見を得た。第一に、日本の家計の需要システムは明確に非相似拡大的であり、すべての財の総支出弾力性を 1 に制約するホモセティック CES の仮定は棄却された。地方ブロック固定効果による主推定では、結合 Wald 検定が非ホモセティシティを強く支持し、wild クラスター・ブートストラップによる区間推定でも教育・被服・教養娯楽が有意な奢侈財、食料・家具が有意な必需財として識別された。復元された総支出弾力性から、教育を最も強い奢侈財、食料・光熱水道を必需財とする経済的に整合的な序列を示した。第二に、反実仮想シミュレーションによる 2015 年から 2024 年のエンゲル係数上昇の要因分解では、その主因は食料品の相対価格高騰（価格効果、モデル総効果の約 7 割）であり、家計の代替の困難さ（粗補完性）がエンゲル係数を押し上げていた。非相似拡大的な所得効果も食料シェアを同方向に動かすが、その寄与率は穏当（13.5%）で、世帯構成の変化（同 16.6%）と同程度であった。すなわち、日本の需要構造は確かに非相似拡大的だが、近年のエンゲル係数上昇という時系列現象そのものは主として相対価格主導である。所得効果を構造的に表現できないホモセティック CES は、この非相似拡大的構造を捉えられ

* 本研究は JSPS 科研費 JP23K25496, JP24H00012 の助成を受けたものである。

[†] 東洋大学経済学部, E-mail: tonogi@toyo.jp

ない点が弱みであるが、当該期間のトレンドに限ればその主因は価格効果にあった。

さらに、厚生計測上の含意を見ると、両モデルとも効用水準は当該期間に約 5% 低下した。両モデルの生計費は平穏な年には近接するが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には NH-CES の生計費が CES を上回る。NH-CES による COLI は Törnqvist 価格指数をよく近似する一方、CES はこれを下回っており、ホモセティック CES がインフレ局面の生計費を過小評価することが示された。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数分解が価格主導であったこととは分析の側面を異にしており、両者は矛盾しない。

本研究の発見は、家計が直面する相対価格の歪みと、必需品偏重を強める実質購買力の低下の双方に配慮したマクロ経済政策の必要性を示唆する。

1 はじめに

国民の生活水準を測定する古典的かつ強力な指標の一つに、家計の総支出に占める食料品支出の割合を示す「エンゲル係数（Engel Coefficient）」がある。19 世紀の統計学者エルンスト・エンゲル（Ernst Engel）が発見したこの経験則は、一般に家計が豊かになるほどエンゲル係数は低下し、逆に貧しくなるほど上昇するという、所得と消費構造の間の負の関係を示唆している。エンゲルの発見から約一世紀を経た Houthakker (1957) の国際比較研究はこの経験則を広く実証し、現代の需要分析の礎石とした。

しかし、近年の日本経済においては、このエンゲルの法則が逆の形で、かつ生々しく発現しているように見受けられる。デフレからの脱却と持続的な物価上昇を目指す政策運営が行われる一方で、原材料価格の高騰や為替レート的大幅な減価（円安）といった外部ショックは、家計が直面する物価を押し上げ、名目支出の伸びを上回る生計費の上昇を通じて実質消費支出を押し下げている。

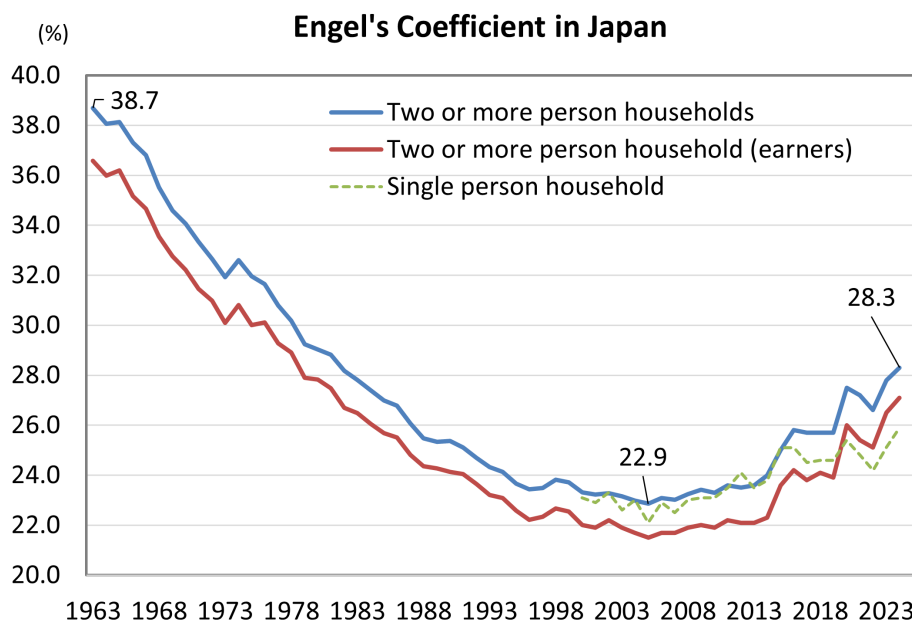


図1 日本のエンゲル係数の長期推移（総務省『家計調査』，全国）：二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・単身世帯

図1は、日本のエンゲル係数（消費支出に占める食料支出の割合）の長期的な推移を、総務省『家計調査』（全国）の三つの世帯区分—二人以上の世帯、二人以上の世帯のうち

勤労者世帯、単身世帯（2000 年以降）—について示したものである。二人以上の世帯では、高度経済成長期以降の所得水準の上昇を背景に、エンゲルの法則が予測するとおりエンゲル係数が長期にわたって低下を続け、1963 年の 38.7% から 2000 年代半ばの 22.9% まで、約 40 年間で約 16 ポイント低下した。ところが 2000 年代後半を境にこの低下トレンドは反転し、三つの世帯区分そろってエンゲル係数は上昇に転じている。二人以上の世帯では底値から 5 ポイント以上回復し、2024 年には 28.3% に達した。所得の上昇に伴って単調に低下するという古典的なエンゲルの法則の含意に反するこの近年の反転上昇は、それ自体が説明を要する現象である。

このエンゲル係数の急激な上昇という現象は、いかなる経済学的メカニズムによって引き起こされているのか。これを解明するためには、家計の需要配分を決定する「価格効果」と「所得効果」の 2 つのチャンネルを分離して検証する必要がある。第一の仮説は、「相対価格効果」である。近年の食料品価格の相対的な高騰に対し、食料という生存に不可欠な財の代替が困難であるため（代替の弾力性が 1 より小さいため）、シェアが膨張したという考え方である。第二の仮説は、「非相似拡大的な所得効果」である。実質消費支出の減少局面において、食料が必需品特性を持つため（食料品の総支出弾力性が 1 より小さいため）に、その支出シェアが内生的に膨張したという考え方である。

ホモセティックな（相似拡大的な）CES 型効用関数を用いた需要システムの研究では選好の相似拡大性を仮定するため、後者の所得効果による需要構造の変化を数学的に無視せざるを得ない。結果として、エンゲル係数の変動のすべてを価格効果（代替弾力性）のみに帰着させることになり、実質購買力の停滞が消費構造に与える歪みを過小評価してしまう危険性がある。

日本のエンゲル係数上昇や家計の需要システムに関する実証研究は、これまでいくつか蓄積されてきた。小嶋・他 (2017) は、需要システムの推定によらず、エンゲル係数を支出の恒等式として表してこれを全微分し、その変動を食料・非食料それぞれの価格要因と数量要因へ会計的に分解する手法（および実質消費を物価・可処分所得に回帰する簡便な時系列分析）により、所得階層別に近年の上昇要因を検討している。竹内・住本 (2020) は、線形近似 AIDS (LA-AIDS; Deaton and Muellbauer, 1980a) を家計調査データに適用して需要の価格弾力性・支出弾力性および嗜好バイアスを推定し、それらを上記と同型のエンゲル係数の全微分による要因分解に組み込んでいる。これらの実証研究は、近年のエンゲル係数上昇が、食料価格の上昇（価格効果）と実質消費支出の減少（所得効果）の双方によってもたらされていることを示唆している。また、阿部・他 (2026) は、AIDS/QUAIDS を用いて 2024 年以降の米価格上昇が家計に与えた影響を分析し、米の自己価格弾力性が相対的に小さく他の主食への代替も限定的であること、および反実仮想

に基づく補償変分が低所得層ほど相対的に大きい可能性があることを示している。国際的にも、世帯支出データから所得階層別の生計費・厚生を復元する手法が急速に発展しており、Atkin et al. (2024) は（相対）エンゲル曲線の水平シフトから理論整合的な所得階層別物価指数と厚生変化を識別する方法を提示している。本研究は、こうした潮流に対し、構造的な NH-CES 需要システムの推定を通じて生計費・厚生計測に接近する点に特徴がある。

しかし、AIDS 等の柔軟な関数形 (Flexible Functional Form) を用いた既存のアプローチには、パラメータ数が多く、マクロ経済学的な多部門一般均衡モデル (CGE モデルなど) や長期的な構造転換 (Structural Transformation) の議論と同型の関数形を共有しにくいという課題がある^{*1}。一方で、マクロ経済モデリングにおいてその扱いやすさから標準的に用いられる CES (Constant Elasticity of Substitution) 効用関数は、「ホモセティック (相似拡大的)」であるという強い仮定を置いている。ホモセティック CES ではすべての財の総支出弾力性が 1 に制約されるため、実質購買力の低下に伴って必需品 (食料) の支出シェアが上昇するという「所得効果」を構造的に表現できない。その結果、標準的 CES を用いてエンゲル係数の変動を分析すると、実質購買力低迷の影響が捨象され、シェアの変動がすべて相対価格の変化 (価格効果) に帰着してしまい、代替弾力性に過大なバイアスをもたらす危険性がある。

マクロ経済動学や一般均衡理論において、この「非相似拡大的 (Non-homothetic) な需要体系」を組み込むことの重要性は、近年さかんに論じられてきた。とりわけ Matsuyama (2019) は、非相似拡大的選好 (エンゲルの法則) を組み込んだ構造変化・技術革新・貿易のグローバル経済モデルを展開し、需要側の所得効果が長期的な産業構造の転換を駆動するメカニズムを定式化している。

本研究の目的は、こうした理論的洞察を基座に置き、近年の日本のエンゲル係数上昇の要因を「価格効果」と「所得効果」に厳密に要因分解することである。そのために、本研究では Comin, Lashkari, and Mestieri (2021) によって提唱された Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 効用関数に基づく需要システムを日本のデータに導入する。NH-CES モデルは、標準的 CES の扱いやすさを保ちながら、各財に異なる非相似

^{*1} ここでの「共有しうる」は関数形の同型性を指すものであり、本研究の推定結果をそのままマクロモデルの需要ブロックとして利用できることを主張するものではない。マクロモデルへの整合的な接続には少なくとも三つの隔たりがある。第一に、consistent aggregation が厳密に成立するにはサブグループ内で代替の弾力性 σ が共通である必要があるが、10 大費目のそれぞれに単一の σ を課す本研究の設定はこの前提を厳密には満たさない。第二に、総務省の 10 大費目は家計簿の用途分類であって、マクロの生産部門分類 (農業・製造業・サービス業など) とは対応しない。第三に、本研究は一般均衡モデルを解いておらず、接続性は潜在的な利点にとどまる。この点は第 5.3 節で改めて論じる。

拡大性パラメーターを導入することで、非相似拡大的な需要体系（エンゲルの法則）を明示的に捉えることができる近年のマクロ経済学におけるフロンティアである。

本研究の目的を達成するため、以下のアプローチを採用する。まず、分析の基盤として、総務省『家計調査（二人以上の世帯のうち勤労者世帯）』の都道府県別・10大分類パネルデータ（2014年–2024年）、および同省『小売物価統計調査』が公表する消費者物価地域差指数を統合したデータセットを構築する。

次いで、Comin et al. (2021) の Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを適用し、標準的なホモセティック CES モデルとの比較を通じて構造パラメーターを推定する。実質消費支出インデックスの構築に際しては、各都道府県の支出構造を反映した Törnqvist 価格指数を用いて名目支出をデフレートする。さらに、計量経済学的な推定においては、相対価格の内生性や測定誤差を排除するため、自県を除く他都道府県の平均価格を用いた空間的 Hausman 型操作変数法 (Spatial Hausman-type IV) による 2 段階最小二乗法 (2SLS) を導入する。また、外挿バイアスによる嗜好パラメーターの歪みを防ぐための「平均中心化 (Mean-centering)」や、社会全体の非相似拡大性パラメーターの加重平均を 1 に置く「マクロ整合的規格化 (Macro-consistent normalization)」を施すことで、理論と実証データを完璧に接合した頑健な識別戦略を構築する。

反実仮想 (Counterfactual) シミュレーションを用いた分析の結果、本研究は次の 2 つの発見を得た。第一に、日本の家計の需要システムが明確に非相似拡大的であることを頑健に識別した。主推定（地方ブロック固定効果）では結合 Wald 検定がホモセティック制約を強く棄却し ($\chi^2(9) = 80.2, p < 0.001$)、wild クラスタ・ブートストラップによる honest 推論でも、教育・被服・教養娯楽が有意な奢侈財、食料・家具が有意な必需財として識別された。とりわけ本研究の所得チャネルの基礎である食料の必需性は $\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.70$ ($P(\eta < 1) = 0.993$) として頑健に支持される。これにより、すべての財の総支出弾力性を 1 に制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。第二に、2015 年–2024 年のエンゲル係数上昇（実績 +3.4% ポイント）の要因分解では、価格効果が支配的であり（モデル総効果の 69%、実績変化の 55%）、財間の代替の困難さ ($\hat{\sigma} = 0.43 < 1$ の補完性) を通じて相対価格の高騰がエンゲル係数を押し上げていた。非相似拡大的な所得効果も食料シェアを同方向に押し上げるが、その寄与は穏当（モデル総効果の 13.5%）で、世帯構成の変化（人口属性効果、同 16.6%）と同程度であった。この 2 つの発見は矛盾しない。非相似拡大性は需要システムの横断面・水準における構造的特性であり、特定期間の時系列変動を価格・所得・人口属性の各チャネルへ配分する要因分解とは捉えている側面が異なるためである。所得効果を構造的に表現できないホモセティック CES は、需要の非相似拡大的構造そのものを捉えられない点で誤設定であるが、本分析期間のエンゲル係数上昇

という現象に限れば、その主因は価格効果にあった。

さらに、標準的 CES と NH-CES の生計費・効用水準を試算・比較すると、名目支出の伸びが生計費上昇に吸収され実質消費は約 5% 低下したこと、および NH-CES の生計費が必需財インフレの 2022 年に CES を +0.89 ポイント上回り、NH-CES が superlative 指数 (Törnqvist) をよく近似する一方で CES がこれを下回ること—すなわちホモセティック CES がインフレ局面の生計費を過小評価すること—が示される。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数上昇が価格主導であったこととは分析の側面を異にしており、両者は整合的である。

本研究の学術的および政策的な貢献は主に以下の 4 点に集約される。第一に、日本のエンゲル係数上昇というミクロな家計の防衛行動を、現代マクロ経済学の洗練された需要システム (Implicit NH-CES) の言語を用いて厳密にモデリング・定量化した点である。これにより、単なる記述統計の域を超え、陰関数定理に基づくミクロ的基礎づけを持った構造推定が可能となった。第二に、計量経済学的なリサーチデザインにおいて、空間的 IV、平均中心化、および加重平均規格化を包括的に導入し、効用関数の単調性制約 (Well-behaved condition) を満たす頑健な需要の総支出弾力性を復元した点である。第三に、近年のエンゲル係数上昇という時系列現象が主として相対価格の高騰によって駆動されている一方で、その背後にある日本の需要システムが非相似拡大的であること、すなわち実質消費の変動が必需品と奢侈品の支出配分を非対称に動かす構造を、頑健に識別した点である。これにより、相対価格の歪みへの対処と、実質購買力の維持・向上を企図するマクロ経済政策の双方の意義を、構造推定に基づいて整理した。第四に、推定された需要システムを用いて標準的 CES と NH-CES の生計費指数および効用水準を試算・比較し、ホモセシティ制約が生計費・厚生計測に与える影響を定量化した点である。需要構造の選択に起因する生計費の差は平穏な年には小さいものの、必需財価格が高騰した 2022 年には +0.89 ポイントに達し、推計生計費指数と公式 CPI の乖離と同程度となる。すなわちホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費を過小評価しており、厚生計測における需要構造の選択が、とりわけインフレ局面では無視できないことを構造推定の観点から示した。

ここで、本研究が構造推計によって明らかにした部分と、推計に先立って与えられている部分とを明示的に切り分けておきたい。本研究の要因分解は、次の関係が示すように「入力」と「写像」の積として構成されている。第 3.6.3 節の (34) より、第 i 財の支出シェアの変化は

$$\Delta \ln w_i \simeq \underbrace{(1 - \sigma) (\Delta \ln p_i - \sum_k w_k \Delta \ln p_k)}_{\text{価格チャンネル}} + \underbrace{(\eta_i - 1) \Delta \ln C}_{\text{所得チャンネル}}$$

と表される。

このうち「入力」にあたるのは実質消費の変化 $\Delta \ln C$ であり、これは名目総消費支出を価格指数でデフレートすれば得られる。すなわち厚生水準の低下幅そのものは指数論の問題であり、需要システムの構造推計を必要としない。本研究の推定値（−4.8%）は、標準的な指数算式のいずれを用いてもほとんど変わらない（第 4.3 節）。

これに対し「写像」にあたるのは、代替の弾力性 σ と各財の総支出弾力性 η_i である。 $\Delta \ln C$ の値を知っていても、 η_i を知らなければそれがエンゲル係数をどれだけ動かすかは分からない。実際、ホモセティック CES では $\eta_i = 1$ が課されるため所得チャネルは恒等的にゼロとなり、実質購買力がいくら低下してもエンゲル係数は動かないことになる。「実質購買力の低下が食料シェアを押し上げる」という命題が定量的に成り立つかどうかは、 $\eta_{\text{食料}} < 1$ が有意に識別されて初めて言えることであり、これは構造推計の産物である。同様に、価格チャネルの大きさが $(1 - \sigma)$ に比例することも構造推計による。

したがって本研究の達成は、厚生水準の低下幅を測定したことではなく、与えられた厚生ショックが需要構造を通じてエンゲル係数へ伝播する経路を識別し、その大きさを相対価格チャネルと比較可能にしたことにある。この切り分けが含意する方法上の限界については第 5.4 節で改めて論じる。

本研究の構成は以下の通りである。まず第 2 節では、伝統的な需要システム分析およびマクロ経済学のベンチマークとなる、標準的（ホモセティック）な CES 効用関数に基づく消費理論について体系的な整理を行う。続く第 3 節では、本研究の理論的コアとなる Comin et al. (2021) の Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 効用関数に基づく消費理論へと展開し、陰関数定理を用いた支出シェア方程式の定式化、および需要の総支出弾力性の数学的導出を詳述する。第 4 節では、構築された理論的枠組みを現実の日本経済へと適用する「日本の食料品エンゲル係数の実証分析」を展開する。具体的には、使用する都道府県パネルデータの概要と Törnqvist 実質消費インデックスの構築プロセスを説明した後、空間的 Hausman 型操作変数法（IV）を用いた 2SLS による構造パラメーターの推定結果、および反実仮想シミュレーションによるエンゲル係数変動の価格・所得・人口属性への要因分解結果を提示する。第 5 節では、本研究の発見が持つ政策的インプリケーションや、推定された需要システムの非相似拡大性が持つ厚生的含意についてディスカッションを行い、最後に第 6 節において本研究の結論を述べる。

2 CES 型効用関数

CES(Constant Elasticity of Substitution) 型の効用関数は消費理論においては代表的な効用関数である。需要の代替の弾力性が全ての財で一定であり、無差別曲線が相似拡大的であることが知られている。また、その特殊な例として、線形効用関数、コブ・ダグラス型効用関数、レオンチェフ型の効用関数も含む。

なお、以下では変数を次の様に定義する。

- t 期の財・サービスの数量ベクトル:

$$q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{N_t t})$$

- t 期の財・サービスの価格ベクトル:

$$p_t = (p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{N_t t})$$

- t 期の財・サービスの集合: Θ_t
- t 期の財・サービスの数: $N_t = N(\Theta_t)$

2.1 家計の効用最大化問題

t 期の効用水準を U_t とするとき、CES 型効用関数を次の様に書くことができる。

$$U_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1)$$

ここで、 $a_i > 0$ は家計の消費生活に占める第 i 財の相対的な重要度 (Taste Parameter) を示している。従って、 a_i の絶対水準には意味はない。ここでは CES 型効用関数を基準化するために $\sum_{i \in \Theta_t} a_i = 1$ とする。代替の弾力性を σ とすると、 ρ は次の様なパラメーターである。

$$\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}, \quad \rho \leq 1, \quad \rho \neq 0.$$

従って、CES 型効用関数を次の様に書くこともできる。

$$U_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \sigma \geq 0.$$

代替の弾力性パラメーター ($\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$) と効用関数の形状を整理すると以下の通りである。

表 1 CES 型効用関数における ρ と σ の関係

ρ の範囲	σ の範囲	性質	解釈
$\rho \rightarrow 1$	$\sigma \rightarrow \infty$	線形効用	完全代替
$0 < \rho < 1$	$1 < \sigma < \infty$	—	代替性が高い
$\rho \rightarrow 0$	$\sigma \rightarrow 1$	コブ=ダグラス型	単位弾力性 ($\sigma = 1$)
$\rho < 0$	$\sigma < 1$	—	補完性が強い
$\rho \rightarrow -\infty$	$\sigma \rightarrow 0$	レオンチェフ型	完全補完

E_t を t 期の名目総消費支出とすると、予算制約式は以下の通りである。

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq E_t.$$

このとき、家計が直面する効用最大化問題は以下の様に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max_{q_{it}} & \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \\ \text{subject to} & \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq E_t. \end{aligned}$$

この問題の内点解の一階条件をラグランジュの未定乗数法を用いて導出する。

$$\mathcal{L}_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} + \lambda_t \left(E_t - \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \right).$$

$\mathcal{L}_t$ は最適化問題のラグランジュ関数、 λ_t はラグランジュ乗数である。この関数を q_{it} と λ_t について偏微分してゼロに等しいと置くことで関数の最大化点の 1 階の条件を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} &= \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} - \lambda_t p_{it} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \lambda_t} &= \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} - E_t = 0. \end{aligned}$$

一つ目の条件から、次の様に展開できる。

$$\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} = \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} = \lambda_t p_{it}.$$

両辺に q_{it} を掛けると、

$$\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \lambda_t p_{it} q_{it}$$

効用関数の定義 (1)、 $U_t = U(q_t) = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$ 、を用いると、次の表現を得る。

$$\begin{aligned} U_t \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} &= \lambda_t p_{it} q_{it} \\ \Leftrightarrow \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} &= \frac{\lambda_t}{U_t} p_{it} q_{it} \end{aligned}$$

ここでの CES 型効用関数では 1 次同次性を仮定しているため、次のオイラーの定理 (Euler's Theorem) が成立する。

$$\sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} q_{it} = U(q_t) = U_t$$

オイラーの定理に $\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} = 0$ の条件、つまり $\frac{\partial U}{\partial q_{it}} q_{it} = \lambda_t p_{it} q_{it}$ を代入すると、

$$U(q_t) = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} q_{it} = \lambda_t \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \lambda_t E_t.$$

つまり、ラグランジュ係数は総消費支出 E_t を効用水準 U_t に変換するもの、または総消費支出が 1 単位増加したときの効用の増加分（支出の限界効用）と解釈することができる。このとき、

$$U_t = \lambda_t E_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_t}{U_t} = \frac{1}{E_t}$$

ここで、前小節の $\frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \frac{\lambda_t}{U_t} p_{it} q_{it}$ に代入すると、次の表現を得る。

$$\frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t}.$$

つまり、消費者行動における総支出に占める第 i 財の支出シェア w_{it} の効用関数のパラメーターによる表現を得た。

$$w_{it} = \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt}q_{jt}} = \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho}. \quad (2)$$

2.2 通常の需要関数

CES 型効用に基づく通常の需要関数 (Marshallian Demand Function) を導出する。通常の需要関数とは家計が所与の所得と価格ベクトルの下で効用最大化行動をとる際の需要ベクトルの決定式である。

$$q_{it} = D_i^M(p_t, E_t)$$

効用最大化問題の 1 階の条件の第 1 式から、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} &= \lambda_t p_{it} \\ q_{it}^{\rho-1} &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{1-\frac{1}{\rho}} \\ &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \\ &= \lambda_t a_i^{-1} p_{it} U_t^{\rho-1} \\ &\Leftrightarrow \\ q_{it} &= \lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} a_i^{-\frac{1}{\rho-1}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}} U_t. \end{aligned}$$

これを、予算制約式に代入すると、以下の表現を得る。

$$\begin{aligned} E_t &= \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} = \sum_{i \in \Theta_t} p_{it} \left(\lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}} U_t \right) \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} &= U_t^{-1} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{-1} E_t. \end{aligned}$$

上記の $\lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}}$ の式を $q_{it} = \lambda_t^{\frac{1}{\rho-1}} a_i^{-\frac{1}{\rho-1}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}} U_t$ に代入すると、

$$\begin{aligned} q_{it} &= \left(U_t^{-1} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^{\frac{1}{1-\rho}} p_{jt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{-1} E_t \right) a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}} U_t \\ &= \left(\frac{a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^{\frac{1}{1-\rho}} p_{jt}^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right) E_t. \end{aligned}$$

これを整理して、通常の需要関数を得る。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} E_t.$$

ρ と代替の弾力性 σ の関係に注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\rho} &= \sigma, \\ \frac{\rho}{\rho-1} &= 1-\sigma \end{aligned}$$

これを通常の需要関数に代入すると、代替の弾力性による通常の需要関数を得る。

$$q_{it} = D_i^M(p_t, E_t) = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{E_t}{p_{it}} \quad (3)$$

2.2.1 限界代替率と価格比

通常の需要関数が得られたところで、最適消費における限界代替率（Marginal Rate of Substitution; MRS）と価格比の関係を見ておこう。限界代替率とは、ある財の消費を1単位増やしたとき、ある財の消費をどれだけ減らせば元の効用水準を維持できるかという交換比率である。無差別曲線上で効用関数を全微分すると、次の様に書くことができる。

$$dU_t = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} dq_{it} = 0.$$

ここで、第 i 財と第 j 財の変化のみに着目し、他の財の消費量は一定と仮定すると、

$$dU_t = \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} dq_{it} + \frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}} dq_{jt} = 0.$$

これを解くことで第 i 財と第 j 財の限界代替率を求めることができる。

$$MRS_{ij} = \frac{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}}}{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}}} = -\frac{dq_{jt}}{dq_{it}}$$

ここで 1 階の条件における第 i 財の限界効用が $\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}} = \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} a_i q_{it}^{\rho-1} = \lambda_t p_{it}$ であることに着目すると、最適消費における限界代替率の比が価格比に等しいことを示すことができる。

$$MRS_{ij} = \frac{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}}}{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}}} = \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{a_j q_{jt}^{\rho-1}} = \frac{p_{it}}{p_{jt}}$$

これを整理すると、内点解が成立する条件を示すことができる。

$$\frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{p_{it}} = \frac{a_j q_{jt}^{\rho-1}}{p_{jt}}$$

ここで、端点解の条件について考察しておく。ここでは第 i 財の消費量がゼロ ($q_{it} = 0$) となる場合を考察する。最適消費が実現する場合には全ての財について価格 1 単位当たりの限界効用が均等となる。 $\rho - 1 = -1/\sigma$ であることに注意すると、

$$\frac{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{jt}} = \kappa, \quad \forall j.$$

もし第 i 財で次の条件が成り立つなら、 $q_{it} = 0$ となる。

$$\frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{it}} < \frac{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_{jt}} = \kappa.$$

つまり、限界代替率 (MRS_{ij}) が価格比 ($\frac{p_{it}}{p_{jt}}$) より低いときに、端点解が成立する。

$$MRS_{ij} = \frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} < \frac{p_{it}}{p_{jt}}.$$

ここで、 $q_{it} \rightarrow 0$ のとき、 MRS_{ij} がどのような値に収束するか考えてみよう。もし、代替の弾力性が高い (代替的: $\sigma > 1$) なら、

$$\lim_{q_{it} \rightarrow 0} MRS_{ij} = \lim_{q_{it} \rightarrow 0} \left(\frac{a_i q_{it}^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} \right) = \infty.$$

この場合でも、 p_{it}/p_{jt} ($> MRS_{ij}$) も無限大に発散してしまい、端点解はあり得ない。 $\sigma \rightarrow 1$ の場合（コブ・ダグラス型）でも同様に端点解はあり得ない。従って、財が分割可能（ $q_{it} > 0$ をいくらでも小さくできる）なとき、CES 型効用関数において端点解は起こりえない。

財の代替性が高い（ $\sigma > 1$ ）、かつ、財が分割不可能で q_{it} に下限（ $\bar{q}_i$ ）があるとき、

$$MRS_{ij} = \frac{a_i \bar{q}_i^{-\frac{1}{\sigma}}}{a_j q_{jt}^{-\frac{1}{\sigma}}} < \frac{p_{it}}{p_{jt}},$$

となるなら、第 i 財の相対価格が非常に高いとき、第 i 財の消費量がゼロ（ $q_{it} = 0$ ）という端点解が起こり得る。

もし、代替の弾力性が低い（補完的： $0 < \sigma < 1$ 、つまり、 $\rho < 0$ ）なら、第 i 財の消費量がゼロ（ $q_{it} = 0$ ）のとき、効用関数はこのように書くとしよう。

$$U_t = \left(a_i q_{it}^\rho + \sum_{\substack{j \in \Theta_t \\ j \neq i}} a_j q_{jt}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

このとき、 $\rho = -1$ とすると、

$$U_t = \frac{1}{\left(\frac{a_i}{q_{it}} + \sum_{\substack{j \in \Theta_t \\ j \neq i}} \frac{a_j}{q_{jt}} \right)}$$

ここで、 $q_{it} = 0$ とすれば、分母が無限大となり、効用は無限小になる。従って、 $\rho < 0$ のとき、どれか一つの財でも消費量をゼロとすれば、その時点で効用がゼロとなるため、端点解は起こりえない。

2.2.2 支出シェア：数量ベクトルと価格ベクトル

通常の需要関数 ((3) 式) から、価格ベクトルに基づく最適消費の支出シェアを導出する。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} E_t}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} p_{it}}$$

両辺を E_t で割って、 p_{it} をかけると、以下の表現を得る。

$$w_{it} = \frac{p_{it}q_{it}}{E_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \quad (4)$$

先に消費数量ベクトルに基づく最適消費の支出シェア ((2) 式) を導いた。ただし、ここでは $(\sigma - 1)/\sigma = \rho$ である。

$$w_{it} = \frac{a_i q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

効用最大化の一階の条件から、次の式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{it}}}{\frac{\partial U(q_t)}{\partial q_{jt}}} &= \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{a_j q_{jt}^{\rho-1}} = \frac{p_{it}}{p_{jt}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_i q_{it}^{\rho-1}}{p_{it}} &= \frac{a_j q_{jt}^{\rho-1}}{p_{jt}} = \kappa \\ q_{it}^\rho &= a_i^{\frac{\rho}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \kappa^{\frac{\rho}{\rho-1}} \\ &= a_i^{\sigma-1} p_{it}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma} \end{aligned}$$

これを消費数量ベクトルに基づく最適消費の支出シェアに代入すると、価格ベクトルに基づく最適消費シェアに一致する。

$$\begin{aligned} w_{it} &= \frac{a_i q_{it}^\rho}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j q_{jt}^\rho} \\ &= \frac{a_i a_i^{\sigma-1} p_{it}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j a_j^{\sigma-1} p_{jt}^{1-\sigma} \kappa^{1-\sigma}} \\ &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \end{aligned}$$

2.2.3 需要の総支出弾力性

通常の需要関数を用いて第 i 財の需要の総支出弾力性 ($\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t}$) を計算する*2。通常の需要関数を E_t で偏微分すると、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial E_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{1}{p_{it}}.$$

両辺に E_t/q_{it} を掛ければ、CES 型効用による需要の総支出弾力性が 1 であることがわかる。

$$\frac{\frac{\partial q_{it}}{q_{it}}}{\frac{\partial E_t}{E_t}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{E_t}{p_{it} q_{it}} = w_{it} \frac{1}{w_{it}} = 1$$

2.2.4 自己価格弾力性と交差弾力性

自己価格弾力性

通常の需要関数から需要の自己価格弾力性 (own price elasticity of demand) を導く。まず、通常の需要関数の自己価格についての偏微分を求める。 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} = A$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{\partial D_i^M(p_t, E_t)}{\partial p_{it}} \\ &= \frac{\partial (a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} E_t)}{\partial p_{it}} \\ &= -\sigma a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma-1} A^{-1} E_t - a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} E_t \frac{\partial A}{\partial p_{it}}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial A}{\partial p_{it}} = (1 - \sigma) a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$ であることを用いて、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} = -\sigma a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma-1} A^{-1} E_t - a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} E_t (1 - \sigma) a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$$

*2 本研究のモデルは総消費支出を所与とした期内の配分問題 (intratemporal allocation) を扱っており、貯蓄・労働供給の決定は明示的に扱わない。 E_t は所得ではなく名目の総消費支出である。したがって $\partial \ln q_{it} / \partial \ln E_t$ は厳密には総支出弾力性 (total expenditure elasticity) であり、需要分析の慣行に従って所得弾力性と呼ばれることも多いが、本研究ではモデルとの整合性を優先して総支出弾力性と記す。Comin et al. (2021) も “income (expenditure) elasticity” と併記している。

$q_{it} = a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} E_t$ であることを用いて整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} &= \frac{1}{p_{it}} (-\sigma q_{it} - (1 - \sigma) q_{it} A^{-1} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}) \\ &= \frac{q_{it}}{p_{it}} (-\sigma - (1 - \sigma) A^{-1} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}).\end{aligned}$$

$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{A} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t}$ であることに注意すれば、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}} = -\frac{q_{it}}{p_{it}} (\sigma + (1 - \sigma) w_{it}).$$

従って需要の自己価格の弾力性 e_{ii} は次の様に求められる。

$$e_{ii} = -\frac{\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{it}}}{\frac{q_{it}}{p_{it}}} = \sigma + (1 - \sigma) w_{it}$$

もし、第 i 財のシェアが無視できるほど小さいなら、 $e_{ii} \approx \sigma$ となり、需要の自己価格弾力性は代替の弾力性 σ に極めて近いことが示される。 $\sigma = 1$ なら、 $e_{ii} = 1$ となり、価格の上昇率と数量の減少率の絶対値が等しく、販売シェアは一定となる。

交差価格弾力性

次に、需要の交差価格弾力性 (cross price elasticity of demand) を導く。

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} &= \frac{\partial D_i^M(p_t, E_t)}{\partial p_{jt}} \\ &= \frac{\partial (a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} E_t)}{\partial p_{jt}} \\ &= -a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} E_t \frac{\partial A}{\partial p_{jt}}\end{aligned}$$

$\frac{\partial A}{\partial p_{it}} = (1 - \sigma) a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma}$ であることを用いて、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-2} E_t (1 - \sigma) a_j^\sigma p_{jt}^{-\sigma}$$

$q_{it} = a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} A^{-1} E_t$ であることを用いて整理すると、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -q_{it}(1 - \sigma)A^{-1}a_j^\sigma p_{jt}^{-\sigma}$$

$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{A} = \frac{p_{it}q_{it}}{E_t}$ であることに注意すれば、

$$\frac{\partial q_{it}}{\partial p_{jt}} = -\frac{q_{it}}{p_{jt}}(1 - \sigma)w_{jt}$$

従って需要の交差価格の弾力性 e_{ij} は次の様に求められる。

$$e_{ij} = -\frac{\frac{\partial q_{it}}{q_{it}}}{\frac{\partial p_{jt}}{p_{jt}}} = (1 - \sigma)w_{jt}$$

つまり、 $\sigma > 1$ なら、第 j 財の価格上昇は、第 i 財の需要の増加につながる（粗代替材）。 $\sigma < 1$ なら、第 j 財の価格上昇は、第 i 財の需要の減少につながる（粗補完財）。 $\sigma = 1$ なら、 $e_{ij} = 0$ となり、他の財の価格変化は第 i 財の購入数量に影響を与えない。

2.3 間接効用関数

CES 型効用に基づく間接効用関数 (Indirect Utility Function) を導出する。間接効用関数とは家計が所与の所得水準と価格ベクトルの下で効用最大化行動をとる際の効用水準の決定式である。

$$U_t = V(p_t, E_t)$$

CES 型効用関数に通常的需求関数 ((3) 式) を代入することで、間接効用関数を得る。

$$\begin{aligned}
U_t &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i (q_{it})^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i \left(\frac{a_i^{\frac{1}{\rho-1}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} E_t}{\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} p_{it}} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(E_t^\rho \sum_{i \in \Theta_t} a_i \left(\frac{a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{1}{\rho-1}}}{\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(E_t^\rho \sum_{i \in \Theta_t} a_i \frac{a_i^{\frac{\rho}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= E_t \left(\frac{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= E_t \frac{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}}{\left(\sum_{k \in \Theta_t} a_k^{\frac{1}{1-\rho}} p_{kt}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho}{\rho}}}} \\
&= \frac{E_t}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_{it}^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}}
\end{aligned}$$

これを代替の弾力性を用いて表現すれば、以下の通りである。

$$\frac{E_t}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} = V(p_t, E_t) \quad (5)$$

2.4 支出関数

家計行動における効用最大化問題と費用最小化問題の双対性から、間接効用関数を用いて支出関数を求めることができる。支出関数とは、家計が所与の価格ベクトルの下で効用水準 U_t を達成するための最小費用水準の決定式である。

$$E_t = E(p_t, U_t)$$

間接効用関数 (5) を総消費支出 E_t について解けば、以下の支出関数を得る。

$$E_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t = E(p_t, U_t) \quad (6)$$

これを効用水準 U_t で割ると、単位費用関数 (Unit Cost Function) を得る。単位費用関数を物価水準 P_t と定義しておく。

$$E(p_t, 1) = \frac{E(p_t, U_t)}{U_t} = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \equiv P_t \quad (7)$$

つまり、効用水準 U_t を計算することができれば、 E_t/U_t によって、物価水準を推定することができる。

2.5 補償需要関数

CES 型効用に基づく補償需要関数 (Hicksian Demand Function) を導出する。補償需要関数とは家計が所与の効用水準と価格ベクトルの下で支出最小化行動をとる際の需要ベクトルの決定式である。

$$q_{it} = D_i^H(p_t, U_t)$$

通常的需求関数、 $D^M(p_t, E_t)$ 、に支出関数、 $E_t = E(p_t, U_t)$ 、を代入すると、以下の様に補償需要関数を導出できる。

$$\begin{aligned}
q_{it} &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{E_t}{p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \frac{\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t}{p_{it}} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} U_t \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma} - \frac{1-\sigma}{1-\sigma}} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} U_t \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\
&= a_i^\sigma \left(\frac{p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} U_t = D^H(p_t, U_t)
\end{aligned} \tag{8}$$

2.5.1 シェファードの補題

効用関数が強純凹性と連続微分可能性をもつとき、支出関数 (6) を価格 p_{it} について偏微分すると、補償需要関数が導出される。これをシェファードの補題 (Shephard's Lemma) と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(p_t, U_t)}{\partial p_{it}} &= \frac{\partial \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t}{\partial p_{it}} \\
&= \frac{1}{1-\sigma} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} U_t \cdot a_i^\sigma (1-\sigma) p_{it}^{-\sigma} \\
&= a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} U_t \\
&= a_i^\sigma \left(\frac{p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} U_t = D^H(p_t, U_t)
\end{aligned}$$

2.6 構造パラメーターの推定式の導出

通常の需要関数の支出シェア表現 ((4) 式) で、以下の表現を導いた。

$$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}.$$

ここで、第 i 財の支出シェアと基準財（第 b 財）の支出シェアの比を取れば、以下の様に整理できる。

$$\frac{w_{it}}{w_{bt}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{a_b^\sigma p_{bt}^{1-\sigma}}$$

両辺の対数をとれば、構造パラメーターの推定式を得る。

$$\ln \left(\frac{w_{it}}{w_{bt}} \right) = \sigma \ln \left(\frac{a_i}{a_b} \right) + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{it}}{p_{bt}} \right). \quad (9)$$

この支出シェアの需要式を識別するには、価格比 $\ln \left(\frac{p_{it}}{p_{bt}} \right)$ の内生性に対処する必要がある。識別戦略については実証分析の節で詳しく説明する。

3 Non-homothetic CES 型効用関数

Non-homothetic CES 型の効用関数は近年注目される効用関数型である。CES 型効用関数とは違い需要の代替の弾力性が全ての財で一定とはならず、所得水準に応じて変化する。Non-homothetic の名に示されるように無差別曲線の相似拡大性も消失する。Homothetic な CES 型効用関数では所得増減に伴うエンゲル係数の変動といった現象を説明することはできず、Non-homothetic な性質を持つ効用関数が必要である。陰関数（implicit additivity）によって需要の非相似拡大性を表現するこの定式化は Hanoch (1975) の陰的加法性モデルに起源をもち、Comin et al. (2021) がこれをマクロ経済の構造変化分析に適した形へ整備したものである。

3.1 陰関数による効用関数の定義

t 期の効用水準を C_t とするとき、Non-homothetic CES 型効用関数を次の様に陰関数として書くことができる。

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma}} q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} = 1, \quad a_i > 0, \quad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1 \quad (10)$$

ここで、 a_i は家計の消費生活に占める第 i 財の相対的な重要度（Taste Parameter）を示している。ここでは CES 型効用関数を基準化するために

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i = 1$$

とする。

この陰関数において $\epsilon_i = \epsilon$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} &= 1, \\ C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} \sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} &= 1, \\ C_t^{\frac{\epsilon - \sigma}{\sigma}} &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{-1}, \\ C_t &= \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma - \epsilon}}. \end{aligned}$$

もし、 $\epsilon = 1$ とすれば、この関数は CES 型効用関数と一致する。

$$C_t = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i q_{it}^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}}.$$

なお、 ϵ_i は各財の非相似拡大性パラメーター (non-homotheticity parameter) であり、財間の差 $\epsilon_i - \epsilon_j$ のみが需要に現れて識別されるため、その水準には規格化が必要である。この差は、後述する相対消費数量の式から、効用 (実質消費) 水準に関する相対需要の弾力性 $\partial \ln(q_{it}/q_{jt})/\partial \ln C_t = \epsilon_i - \epsilon_j$ に一致する。本研究の実証分析では、社会全体の加重平均を 1 とするマクロ整合的規格化 ($\bar{\epsilon} = 1$ 、後述) を採用する。この規格化のもとでは ϵ_i 自身が第 i 財の総支出弾力性 η_i に一致する。

3.2 家計の効用最大化問題

予算制約式は以下の通りである。

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq E_t$$

このとき、家計が直面する効用最大化問題は以下の様に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max_{q_{it}} \quad & C_t = U(q_t), \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma - 1)/\sigma} = 1, \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} \leq E_t.$$

この問題の内点解の一階条件をラグランジュの未定乗数法を用いて導出する。

$$\mathcal{L}_t = C_t - \lambda_{1t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} - 1 \right] - \lambda_{2t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} p_{it} q_{it} - E_t \right]$$

$\mathcal{L}_t$ は最適化問題のラグランジュ関数、 $\lambda_{1t}, \lambda_{2t}$ はラグランジュ乗数である。この関数を q_{it} 及び C_t について偏微分し、0 と置くことで関数の最大化点の1階の条件を求める。

まず、 $\partial \mathcal{L}_t / \partial C_t = 0$ から考察する。

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial C_t} = 1 - \lambda_{1t} \left[\sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - 2\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} \right] = 0.$$

C_t を総和計算から括りだすと、

$$\frac{C_t}{\lambda_{1t}} = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}$$

効用関数の定義 (10) より、 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = 1$ であるから、

$$\theta_{it} \equiv a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}, \quad \theta_{it} > 0, \quad \sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} = 1 \quad (11)$$

は財 i についてのウェイトと解釈できる。したがって、 C_t / λ_{1t} は $(\epsilon_i - \sigma) / \sigma$ の θ 加重平均であると解釈できる。

$$\tilde{\epsilon}(q_t, C_t) \equiv \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} \theta_{it} = \frac{C_t}{\lambda_{1t}} \quad (12)$$

なお、ここでの $\tilde{\epsilon}(q_t, C_t)$ は、後に用いる非相似拡大性パラメーターの支出シェア加重平均 $\bar{\epsilon} \equiv \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i$ とは別の量である。両者の関係は最適点において $\tilde{\epsilon} = (\bar{\epsilon} - \sigma) / \sigma$ となる (本節末を参照)。ウェイト θ_{it} は効用関数の正則性を論じる際に中心的な役割を果たす (第 3.7 節)。

次に、 $\partial \mathcal{L}_t / \partial q_{it} = 0$ について考察する。ラグランジュ関数において効用関数の定義式には $-\lambda_{1t}$ が掛かっていることに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial q_{it}} &= -\lambda_{1t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \frac{\sigma - 1}{\sigma} q_{it}^{-1/\sigma} - \lambda_{2t} p_{it} = 0, \\ \Leftrightarrow \quad \lambda_{2t} p_{it} &= \lambda_{1t} \frac{1 - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}, \\ \Leftrightarrow \quad p_{it} &= \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1 - \sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}. \end{aligned}$$

この条件から、次の様に展開できる。両辺に q_{it} を掛けると、

$$p_{it}q_{it} = \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i-\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

全ての財について、足し合わせると、

$$\sum_{i \in \Theta_t} p_{it}q_{it} = \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i-\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} \right).$$

効用関数の定義 (10) から、右辺の括弧内は 1 であるから、

$$E_t = \sum_{i \in \Theta_t} p_{it}q_{it} = \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma}. \quad (13)$$

この式を用いて、 $p_{it}q_{it} = \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i-\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma}$ の両辺を割れば、

$$w_{it} = \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{i \in \Theta_t} p_{it}q_{it}} = a_i C_t^{(\epsilon_i-\sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \theta_{it}. \quad (14)$$

すなわち、(11) で導入したウェイト θ_{it} は、最適点においては支出シェア w_{it} そのものである。言い換えれば、効用関数を定義している陰関数 (10) は、最適点においては支出シェアの加算条件 $\sum_{i \in \Theta_t} w_{it} = 1$ に他ならない。

ラグランジュ乗数の解釈

(14) を (12) に代入すると、最適点では

$$\tilde{\epsilon}(q_t, C_t) = \sum_{i \in \Theta_t} \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} w_{it} = \frac{\bar{\epsilon} - \sigma}{\sigma}, \quad \bar{\epsilon} \equiv \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i$$

であるから、(12) より効用制約に対する乗数は

$$\lambda_{1t} = \frac{C_t}{\tilde{\epsilon}(q_t, C_t)} = \frac{\sigma C_t}{\bar{\epsilon} - \sigma} \quad (15)$$

と定まる。これを (13) に代入すれば、予算制約に対する乗数、すなわち所得の限界効用が

$$\lambda_{2t} = \frac{\lambda_{1t}}{E_t} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} = \frac{C_t}{E_t} \cdot \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \quad (16)$$

と求まる。包絡線定理より $\lambda_{2t} = \partial C_t / \partial E_t$ であるから、(16) の両辺に E_t / C_t を掛けて

$$\left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln E_t} \right|_{p_t} = \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma}$$

を得る。これは第 3.5 節で支出関数の微分から独立に導出する (24) 式と一致する。

また (16) から、所得の限界効用が正であること ($\lambda_{2t} > 0$) は

$$\frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} > 0 \iff \frac{\bar{\epsilon} - \sigma}{1 - \sigma} > 0$$

と同値である。 $0 < \sigma < 1$ のときこれは $\bar{\epsilon} > \sigma$ を意味する。この不等式は効用関数の局所的な単調性条件そのものであり、第 3.7 節で改めて論じる。

3.2.1 限界代替率と価格比

価格比と限界代替率との関係は $p_{it} = \frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}$ の財 i と財 j で比をとることで導くことができる。

$$\frac{p_{it}}{p_{jt}} = \frac{\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{1-\sigma}{\sigma} a_j C_t^{(\epsilon_j - \sigma)/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = \frac{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = MRS_{ij}$$

この式を次の様に変形する。

$$\begin{aligned} \frac{p_{it}}{p_{jt}} &= \frac{\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{\sigma - 1}{\sigma} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{-1/\sigma}}{\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \frac{\sigma - 1}{\sigma} a_j C_t^{(\epsilon_j - \sigma)/\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma}} = \frac{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma}}{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma}} \left(\frac{q_{it}}{q_{jt}} \right)^{-1/\sigma} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{q_{it}}{q_{jt}} \right)^{-1/\sigma} &= \frac{p_{it}}{p_{jt}} \cdot \frac{a_j C_t^{\epsilon_j/\sigma}}{a_i C_t^{\epsilon_i/\sigma}} \\ \Leftrightarrow \frac{q_{it}}{q_{jt}} &= \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j} \end{aligned}$$

この式は財 i と財 j の購入比率が効用水準と非相似拡大性パラメーターの差 ($\epsilon_i - \epsilon_j$) に依存することを示している。支出シェアの比については次の様に書くことができる。

$$\frac{(p_{it} q_{it})/E_t}{(p_{jt} q_{jt})/E_t} = \frac{w_{it}}{w_{jt}} = \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j} \quad (17)$$

3.3 通常の需要関数

相対消費数量の式、 $\frac{q_{it}}{q_{jt}} = \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^\sigma \left(\frac{p_{it}}{p_{jt}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i - \epsilon_j}$ 、を q_{jt} について解く。

$$q_{jt} = q_{it} \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^\sigma \left(\frac{p_{jt}}{p_{it}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_j - \epsilon_i}$$

これを、予算制約式、 $\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt} q_{jt} = E_t$ 、に代入する。

$$\sum_{j \in \Theta_t} p_{jt} q_{jt} \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^\sigma \left(\frac{p_{jt}}{p_{it}} \right)^{-\sigma} C_t^{\epsilon_j - \epsilon_i} = E_t$$

$$q_{it} a_i^{-\sigma} p_{it}^\sigma C_t^{-\epsilon_i} \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} = E_t$$

整理すれば、通常の需要関数の形を得る。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} = D_i^M(p_t, E_t, C_t). \quad (18)$$

この需要関数は効用水準 C_t を消すことができず、 C_t は効用関数の定義から implicit に決定されるため、インプリシットな通常の需要関数 (Implicit Marshallian Demand Function) と呼ばれる。

また、この需要関数において $\epsilon_i = \epsilon$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の通常の需要関数 (3) と一致する。

$$q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^\epsilon}{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} = D_i^M(p_t, E_t).$$

同時に、通常の需要関数から、支出シェアについての表現を得る。

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}. \quad (19)$$

これは効用水準が上昇すると、 ϵ_i が相対的に高い財の支出シェアが上昇することを示している。また、 ϵ_i が相対的に低い財の支出シェアが低下する (エンゲルの法則)。

また、この支出シェア関数において $\epsilon_i = \epsilon$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の通常の支出シェア関数と一致する。

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^\epsilon}{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}$$

以下では表記を簡潔にするため、通常の需要関数 (18) および支出シェア (19) に共通して現れる分母を

$$\Omega_t \equiv \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \quad (20)$$

と書く。 Ω_t は数量ベクトルではなく価格ベクトル p_t と効用水準 C_t の関数であり、これを用いれば通常の需要関数と支出シェアはそれぞれ $q_{it} = (a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i} / \Omega_t) \cdot (E_t / p_{it})$ 、

$w_{it} = a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i} / \Omega_t$ と簡潔に書ける。 Ω_t の対数を効用水準および価格で偏微分すると、支出シェアを用いて

$$\frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial \ln C_t} = \sum_{j \in \Theta_t} \epsilon_j \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\Omega_t} = \sum_{j \in \Theta_t} w_{jt} \epsilon_j, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial \ln p_{kt}} = (1 - \sigma) \frac{a_k^\sigma p_{kt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_k}}{\Omega_t} = (1 - \sigma) w_{kt} \quad (22)$$

と表せる。(21) 右辺の加重平均は第 3.5 節で $\bar{\epsilon}$ と定義する量であり、(22) は以下の価格弾力性の導出で繰り返し用いる。

3.4 支出関数

通常の需要関数 (18)、 $q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}}$ 、を効用関数の定義式 (10) に代入することで、支出関数を導出する。まず、通常の需要関数を $(\sigma - 1)/\sigma$ 乗する。

$$q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \left(\frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} \right)^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

これを、効用関数の定義式 (10)、 $\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = 1$ 、に代入すると、

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \left[\left(\frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} \right)^{(\sigma-1)/\sigma} \right] = 1.$$

整理すると、

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \left[(a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i} E_t)^{(\sigma-1)/\sigma} \right] \\ &= \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} E_t^{(\sigma-1)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma + \epsilon_i(\sigma-1)/\sigma} = 1. \end{aligned}$$

C_t の指数部分を整理する。

$$\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} + \epsilon_i \frac{\sigma - 1}{\sigma} = \frac{\epsilon_i - \sigma + \epsilon_i \sigma - \epsilon_i}{\sigma} = \epsilon_i - 1.$$

従って、

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} E_t^{(\sigma-1)/\sigma} \sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} = 1, \\
\Leftrightarrow E_t^{(\sigma-1)/\sigma} &= \frac{\left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right)^{(\sigma-1)/\sigma}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}, \\
\Leftrightarrow E_t &= \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} C_t = E_N(p_t, C_t).
\end{aligned}$$

以上の様に支出関数が導出された。

この支出関数において $\epsilon_i = \epsilon = 1$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の支出関数 (6) と一致する。

$$\begin{aligned}
E_t &= \frac{C_t^\epsilon \sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma}}{C_t^{(\epsilon-1)\sigma/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= C_t^{(\epsilon\sigma-\epsilon)/(\sigma-1) - (\epsilon\sigma-\sigma)/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{(\sigma-1)/(\sigma-1) - \sigma/(\sigma-1)} \\
&= C_t^{(\sigma-\epsilon)/(\sigma-1)} \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)} = C_t \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)} = E_H(p_t, C_t)
\end{aligned}$$

次に、Non-homothetic 効用の支出関数を効用水準 C_t で割ることで、単位コスト関数を得る。

$$P_t = \frac{E_N(p_t, C_t)}{C_t} = \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}}$$

3.5 間接効用関数

間接効用関数、 $C_t = V_t = V(p_t, E_t)$ は支出関数を C_t について解くことで求めることができるが、Non-homothetic CES 効用関数では解析的に解くのは難しい。ここでは、効用水準と所得の関係を整理しておく。

$$E(p_t, C_t) = E_t = \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right)^{\sigma/(\sigma-1)}} C_t \quad (23)$$

両辺の対数をとると、

$$\ln E_t = \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1} \right) - \frac{\sigma}{\sigma-1} \ln \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right) + \ln C_t$$

この式を C_t で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E_t}{\partial C_t} &= \frac{d \ln E_t}{d E_t} \cdot \frac{\partial E_t}{\partial C_t} = \frac{1}{E_t} \cdot \frac{\partial E_t}{\partial C_t} \\ &= \sum_{j \in \Theta_t} \frac{(\epsilon_j - 1) a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}} \cdot \frac{1}{C_t} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} \frac{(\epsilon_i - 1) a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}} \cdot \frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_t} \\ &= \sum_{j \in \Theta_t} \frac{(a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j})(\epsilon_j - 1)}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{1}{C_t} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} \frac{(a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i})(\epsilon_i - 1)}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}} \cdot \frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_t} \end{aligned}$$

ここで、支出シェア関数 (49)、 $w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}$ 、を用いれば、

$$\frac{C_t}{E_t} \cdot \frac{\partial E_t}{\partial C_t} = \frac{\sigma-1}{\sigma-1} \sum_{j \in \Theta_t} w_{jt}(\epsilon_j - 1) - \frac{\sigma}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} w_{it}(\epsilon_i - 1) + 1$$

ここで、非相似拡大性パラメーターの加重平均を $\sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i = \bar{\epsilon}$ と定義すると ((21) の右辺に等しい)、効用の総支出弾力性を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t / E_t}{\partial C_t / C_t} &= \frac{-1}{\sigma-1} \sum_{i \in \Theta_t} w_{it}(\epsilon_i - 1) + \frac{\sigma-1}{\sigma-1} = \frac{\bar{\epsilon}-1}{1-\sigma} - \frac{\sigma-1}{1-\sigma} = \frac{\bar{\epsilon}-\sigma}{1-\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial C_t / C_t}{\partial E_t / E_t} &= \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon}-\sigma} \end{aligned} \quad (24)$$

従って、非相似拡大性パラメーターの加重平均 $\bar{\epsilon}$ が 1 に等しいなら、効用の総支出弾力性は 1 になる。

次に、所得水準と財 i の価格の関係も整理しておく。

$$\ln E_t = \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1} \right) - \frac{\sigma}{\sigma-1} \ln \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1} \right) + \ln C_t$$

対数化された支出関数を p_{it} で微分すると、支出の価格弾力性が計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln E_t}{\partial p_{it}} &= \frac{d \ln E_t}{d E_t} \cdot \frac{\partial E_t}{\partial p_{it}} = \frac{1}{E_t} \cdot \frac{\partial E_t}{\partial p_{it}} \\
&= (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} \\
&\quad - \frac{\sigma}{\sigma - 1} (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} \\
&= (1 - \sigma) \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} + \sigma \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}} \cdot \frac{1}{p_{it}} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial E_t / E_t}{\partial p_{it} / p_{it}} &= \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}} = \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}
\end{aligned}$$

両辺に E_t / p_{it} をかければ、シェファードの補題に対応する関係 $\partial E_t / \partial p_{it} = q_{it}$ を得る。

$$\frac{\partial E_t}{\partial p_{it}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}} = q_{it}$$

3.6 補償需要関数

支出関数からシェパードの補題を用いて、補償需要関数 ($q_{it} = D^H(p_t, C_t)$) を導出できる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(p_t, C_t)}{\partial p_{it}} &= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E(p_t, C_t)}{p_{it}} \\
&= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1})^{\sigma/(\sigma-1)}} \cdot \frac{C_t}{p_{it}} \\
&= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1})^{\sigma/(\sigma-1)}} = D_i^H(p_t, C_t) = q_{it}
\end{aligned}$$

これを用いて再度、支出シェア関数を得る。

$$\begin{aligned}
w_{it} &= \frac{p_{it}q_{it}}{E_t} = \frac{p_{it}}{P_t C_t} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \frac{1}{P_t} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \left(\frac{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \right)^{-1} \cdot \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}}{\left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i-1}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}} \\
&= \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}
\end{aligned}$$

3.6.1 需要の総支出弾力性

通常の需要関数、 $q_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \cdot \frac{E_t}{p_{it}}$ 、を用いて第 i 財の需要の総支出弾力性 $\left(\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t}\right)$ を計算する。通常の需要関数の自然対数をとると、

$$\ln q_{it} = \sigma \ln a_i - \sigma \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \left(\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j} \right) + \ln E_t$$

需要の総支出弾力性の計算では E_t の直接効果だけではなく、 C_t の変化を通じた間接効果も表れる。なお C_t は (p_t, E_t) の関数であり、以下の偏微分はいずれも価格ベクトル p_t を一定とするものである。具体的には次の様に計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln q_{it}}{\partial E_t} &= \frac{1}{q_{it}} \cdot \frac{\partial q_{it}}{\partial E_t} \\
&= \epsilon_i \cdot \frac{1}{C_t} \cdot \frac{\partial C_t}{\partial E_t} - \left(\sum_{j \in \Theta_t} \frac{a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}} \epsilon_j \right) \frac{1}{C_t} \cdot \frac{\partial C_t}{\partial E_t} + \frac{1}{E_t} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} &= (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\partial C_t/C_t}{\partial E_t/E_t} + 1
\end{aligned}$$

$\frac{\partial C_t/C_t}{\partial E_t/E_t} = \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon}-\sigma}$ であることは (24) で既に求めた。これを代入すると需要の総支出弾力性を得る。

$$\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} = (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} + 1 \quad (25)$$

もし、 $\epsilon_i = \epsilon = 1$, $\forall i$ とすると、CES 型効用関数の総支出弾力性と一致する。

$$\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} = (\epsilon - \epsilon) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \epsilon} + 1 = 1$$

つまり、1% の所得増加は 1% の財 i の需要を引き起こす。

もし $\epsilon_i > \bar{\epsilon}$ ならば、 $\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} > 1$ となり、1% の所得増加は 1% より大きい財 i の需要を引き起こす（奢侈品）。もし $\epsilon_i < \bar{\epsilon}$ ならば、 $\frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} < 1$ となり、1% の所得増加は 1% より小さい財 i の需要を引き起こす（必需品）。

3.6.2 補償価格弾力性（代替効果）

支出シェア (19) は効用水準 C_t の関数として書かれている。したがって C_t を一定として価格を動かす比較静学は補償（Hicks）需要の反応、すなわち Slutsky 分解の代替効果を与える。本項ではこれを求め、次項で非補償の価格弾力性へ進む。

対数化した支出シェアは、(20) の Ω_t を用いて

$$\ln w_{it} = \sigma \ln a_i + (1 - \sigma) \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \Omega_t$$

と書ける。効用水準を一定として $\ln p_{kt}$ で偏微分し、(22) を用いると

$$\left. \frac{\partial \ln w_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{C_t} = (1 - \sigma) \delta_{ik} - (1 - \sigma) w_{kt} = (1 - \sigma) (\delta_{ik} - w_{kt}) \quad (26)$$

を得る。ここで δ_{ik} はクロネッカーのデルタ ($i = k$ のとき 1、それ以外は 0) である。同様に、価格を一定として $\ln C_t$ で偏微分し (21) を用いれば

$$\left. \frac{\partial \ln w_{it}}{\partial \ln C_t} \right|_{p_t} = \epsilon_i - \bar{\epsilon} \quad (27)$$

である。

これを数量に直す。補償需要関数は、支出シェアと支出関数を用いて

$$q_{it}^H = D_i^H(p_t, C_t) = \frac{w_{it}(p_t, C_t) E(p_t, C_t)}{p_{it}}$$

と書けるから、その対数は

$$\ln q_{it}^H = \ln w_{it}(p_t, C_t) + \ln E(p_t, C_t) - \ln p_{it}$$

である。右辺第 1 項の偏微分は (26) で与えられる。第 2 項については、シェファードの補題（第 2.5.1 節）より $\partial E(p_t, C_t) / \partial p_{kt} = q_{kt}$ であるから

$$\left. \frac{\partial \ln E(p_t, C_t)}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{C_t} = \frac{p_{kt}}{E_t} \cdot \frac{\partial E(p_t, C_t)}{\partial p_{kt}} = \frac{p_{kt} q_{kt}}{E_t} = w_{kt}$$

となる。第3項の偏微分は δ_{ik} である。以上を合わせると、補償価格弾力性は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik}^H &\equiv \left. \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{C_t} = (1 - \sigma)(\delta_{ik} - w_{kt}) + w_{kt} - \delta_{ik} \\ &= \delta_{ik} \{(1 - \sigma) - 1\} + w_{kt} \{-(1 - \sigma) + 1\} \\ &= -\sigma(\delta_{ik} - w_{kt})\end{aligned}\quad (28)$$

と求まる。自己弾力性は $\varepsilon_{ii}^H = -\sigma(1 - w_{it}) < 0$ 、交差弾力性は $\varepsilon_{ik}^H = \sigma w_{kt} > 0$ ($i \neq k$) であり、すべての財の組が純代替財 (net substitutes) である。また $\sum_{k \in \Theta_t} \varepsilon_{ik}^H = -\sigma(1 - \sum_{k \in \Theta_t} w_{kt}) = 0$ であり、補償需要が価格についてゼロ次同次であることと整合する。 $w_{kt} \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_{ii}^H \rightarrow -\sigma$ 、 $\varepsilon_{ik}^H \rightarrow 0$ である。

(28) には非相似拡大性パラメーター ε_i が現れない。代替効果はもっぱら σ によって規定されており、 σ が代替の弾力性を担うパラメーターであることがここからも確認できる。

3.6.3 非補償価格弾力性と Slutsky 分解

非補償 (Marshall) 需要は、補償需要に間接効用 $C_t(p_t, E_t)$ を代入した合成関数

$$q_{it}(p_t, E_t) = q_{it}^H(p_t, C_t(p_t, E_t))$$

として表される。したがって非補償価格弾力性には、価格の直接効果に加えて、実質消費水準 C_t の変化を通じた間接効果が現れる。以下ではこの間接効果を先に求める。

■**実質消費水準の価格反応** 恒等式 $E_t = E(p_t, C_t(p_t, E_t))$ の両辺を $\ln p_{kt}$ で偏微分する。 E_t は一定であるから左辺の偏微分は 0 であり、

$$0 = \left. \frac{\partial \ln E}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{C_t} + \frac{\partial \ln E}{\partial \ln C_t} \cdot \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t}$$

となる。右辺第1項はシェファードの補題より w_{kt} であり、第2項の係数は (24) の逆数 $\frac{\bar{\varepsilon} - \sigma}{1 - \sigma}$ である。したがって

$$\left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} = -w_{kt} \frac{1 - \sigma}{\bar{\varepsilon} - \sigma} = -w_{kt} \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln E_t} \right|_{p_t}\quad (29)$$

を得る。すなわち、名目総消費支出を一定としたとき、第 k 財の価格上昇は実質消費水準を、その支出シェア w_{kt} に比例して低下させる。これは第 k 財の価格が 1% 上昇したときの生計費の上昇率が $w_{kt}\%$ であることの反映である。

■非補償価格弾力性 対数化した通常の需要関数

$$\ln q_{it} = \sigma \ln a_i - \sigma \ln p_{it} + \epsilon_i \ln C_t - \ln \Omega_t + \ln E_t$$

を、 E_t を一定として $\ln p_{kt}$ で微分する。ここで注意を要するのは、 Ω_t が価格ベクトル p_t と効用水準 C_t の双方の関数であり ((20))、 E_t を一定としたとき C_t が p_t とともに変化することである。したがって $\ln \Omega_t$ の $\ln p_{kt}$ に関する全微分は、(22) が与える直接効果だけでなく、(21) を通じた間接効果を含む。

$$\left. \frac{d \ln \Omega_t}{d \ln p_{kt}} \right|_{E_t} = \left. \frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{C_t} + \left. \frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial \ln C_t} \cdot \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} = (1 - \sigma) w_{kt} + \bar{\epsilon} \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} \quad (30)$$

(30) を用いると

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} &= -\sigma \delta_{ik} + \epsilon_i \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} - (1 - \sigma) w_{kt} - \bar{\epsilon} \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} \\ &= -\sigma \delta_{ik} - (1 - \sigma) w_{kt} + (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \left. \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} \end{aligned}$$

となる。ここに (29) を代入すると

$$\left. \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} = -\sigma \delta_{ik} - (1 - \sigma) w_{kt} - (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} w_{kt}$$

である。(25) より $(\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} = \eta_i - 1$ であるから、右辺第 3 項は $-(\eta_i - 1) w_{kt}$ に等しい。したがって

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} \equiv \left. \frac{\partial \ln q_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \right|_{E_t} &= -\sigma \delta_{ik} - (1 - \sigma) w_{kt} - (\eta_i - 1) w_{kt} \\ &= -\sigma \delta_{ik} + \sigma w_{kt} - w_{kt} - \eta_i w_{kt} + w_{kt} \\ &= -\sigma (\delta_{ik} - w_{kt}) - \eta_i w_{kt} \end{aligned} \quad (31)$$

を得る。

(31) は、Slutsky 方程式の弾力性表現 $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^H - \eta_i w_{kt}$ (Deaton and Muellbauer, 1980b, Ch.2) にほかならない。右辺第 1 項 $-\sigma (\delta_{ik} - w_{kt})$ は (28) の補償価格弾力性、すなわち代替効果である。第 2 項 $-\eta_i w_{kt}$ が所得効果であり、その大きさは、価格上昇による実質購買力の目減り w_{kt} と、それに対する第 i 財の需要の反応の強さ η_i との積で決まる。

パラメーターで陽に書き下しておく。(25) より

$$\sigma - \eta_i = \sigma - 1 - (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} = (\sigma - 1) \frac{(\sigma - \bar{\epsilon}) - (\epsilon_i - \bar{\epsilon})}{\sigma - \bar{\epsilon}} = \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}}$$

であるから、(31) は

$$\varepsilon_{ii} = -\sigma + \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{it} \quad (32)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{(\sigma - 1)(\sigma - \epsilon_i)}{\sigma - \bar{\epsilon}} w_{kt}, \quad (i \neq k) \quad (33)$$

と書ける。 $w_{kt} \rightarrow 0$ のとき自己価格弾力性は $-\sigma$ に、交差価格弾力性は 0 に収束する。またすべての財で $\epsilon_i = \bar{\epsilon} = 1$ (相似拡大的な場合) とすれば $\eta_i = 1$ となり、(32)・(33) はそれぞれ $\varepsilon_{ii} = -\sigma + (\sigma - 1)w_{it}$ 、 $\varepsilon_{ik} = (\sigma - 1)w_{kt}$ となって、第 2.2.4 節で導いた標準的 CES の価格弾力性に一致する。

支出シェアについて同じ分解を書いておく。 $\ln w_{it} = \ln q_{it} + \ln p_{it} - \ln E_t$ より $\partial \ln w_{it} / \partial \ln p_{kt} \big|_{E_t} = \varepsilon_{ik} + \delta_{ik}$ であるから、(31) を代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln w_{it}}{\partial \ln p_{kt}} \bigg|_{E_t} &= -\sigma (\delta_{ik} - w_{kt}) - \eta_i w_{kt} + \delta_{ik} \\ &= \underbrace{(1 - \sigma)(\delta_{ik} - w_{kt})}_{\text{代替効果}} - \underbrace{(\eta_i - 1)w_{kt}}_{\text{所得効果}} \end{aligned} \quad (34)$$

を得る (第 2 行への変形では $-\sigma(\delta_{ik} - w_{kt}) + \delta_{ik} = (1 - \sigma)(\delta_{ik} - w_{kt}) + w_{kt}$ を用いた)。マクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ のもとでは $\eta_i = \epsilon_i$ であるから、代替効果は σ のみに、所得効果は非相似拡大性パラメーター ϵ_i のみに規定される。 $\epsilon_i < 1$ の必需財では所得効果が代替効果と同方向 (正) に働き、価格上昇が支出シェアを押し上げる作用は代替効果のみの場合よりも強くなる。

(34) は第 4.3 節の要因分解の解釈に直結する。実質消費 C_t を基準年に固定して相対価格のみを動かす反実仮想は (26) をたどるものであり、Slutsky 分解の代替効果に一致する。他方、価格を固定して C_t のみを動かす反実仮想は (27) をたどるものであり、Slutsky 分解の所得効果と同一の経路である。すなわち本研究の「価格効果」と「所得効果」は、非補償価格効果を重複して計上するものではなく、Slutsky 分解の 2 項に対応する互いに排他的な 2 チャネルである。

3.7 効用関数の正則性：局所的単調性と大域的正則性

CES 型効用関数 (1) は数量ベクトル q_t の陽関数 (explicit function) として与えられるため、 $a_i > 0$ でありさえすれば、それが効用関数として備えるべき性質、すなわち局所非

飽和・単調性・準凹性は、関数形から自動的に保証される。これに対し Non-homothetic CES 型効用関数では、効用水準 C_t は陰関数 (10) の解としてのみ定義される。「方程式の解」として定義された量が効用関数として振る舞う保証はなく、そのためのパラメーター制約が必要になる。これが陰的加法性 (implicit additivity) による定式化の代償である。本節ではこの制約を、本研究の記法のもとで明示的に導く。

結論を先に述べれば、必要な条件は単一の不等式に帰着し、それをどの消費ベクトルで評価するかによって「局所的」条件と「大域的」条件に分かれる。

3.7.1 ウェイト θ_{it} と基本不等式

陰関数 (10) の左辺を

$$H(q_t, C_t) \equiv \sum_{i \in \Theta_t} a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it}$$

と書く。ここで θ_{it} は (11) で定義したウェイトであり、 $a_i > 0$ 、 $q_{it} > 0$ 、 $C_t > 0$ より

$$\theta_{it} > 0 \quad (\forall i), \quad \sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} = 1$$

を満たす。すなわち $\theta_t \equiv (\theta_{1t}, \dots, \theta_{N_t t})$ は標準単体 (standard simplex) Δ^{N_t-1} 上の点である。効用水準 C_t は $H(q_t, C_t) = 1$ の解として定義される。

まず H の偏導関数を求める。(11) より $a_i C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} = \theta_{it} q_{it}^{-(\sigma-1)/\sigma}$ であることを用いると、

$$\frac{\partial H}{\partial q_{jt}} = a_j C_t^{(\epsilon_j - \sigma)/\sigma} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma} q_{jt}^{-1/\sigma} = \frac{\sigma-1}{\sigma} \cdot \frac{\theta_{jt}}{q_{jt}}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = \sum_{i \in \Theta_t} a_i \cdot \frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma} C_t^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma - 1} q_{it}^{(\sigma-1)/\sigma} = \frac{1}{\sigma C_t} \sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} (\epsilon_i - \sigma) = \frac{\tilde{\epsilon}(q_t, C_t)}{C_t} \quad (36)$$

を得る。ただし $\tilde{\epsilon}(q_t, C_t)$ は (12) で定義した θ 加重平均である。

陰関数定理より、

$$\frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln q_{jt}} = -\frac{q_{jt}}{C_t} \cdot \frac{\partial H / \partial q_{jt}}{\partial H / \partial C_t} = -\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma} \theta_{jt}}{\tilde{\epsilon}(q_t, C_t)} = \frac{(1-\sigma) \theta_{jt}}{\sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} (\epsilon_i - \sigma)}. \quad (37)$$

$\theta_{jt} > 0$ であるから、(37) の符号は分母の符号と $(1-\sigma)$ の符号のみで決まる。したがって単調性 $\partial C_t / \partial q_{jt} > 0$ ($\forall j$) の必要十分条件は

$$\frac{1}{1-\sigma} \left(\sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} \epsilon_i - \sigma \right) > 0 \quad (38)$$

である。とくに $0 < \sigma < 1$ のとき、(38) は $\sum_i \theta_{it} \epsilon_i > \sigma$ と書ける。以下、条件 (38) を条件 (R) と呼ぶ。

なお、最適点では (14) より $\theta_{it} = w_{it}$ 、 $\tilde{\epsilon} = (\bar{\epsilon} - \sigma)/\sigma$ であるから、(37) は

$$\frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln q_{jt}} = \frac{(1-\sigma) w_{jt}}{\bar{\epsilon} - \sigma}$$

となる。全財について足し合わせると（価格一定のもとで全数量を比例的に増やすことは所得を同率で増やすことに等しいから）

$$\sum_{j \in \Theta_t} \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln q_{jt}} = \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} \sum_{j \in \Theta_t} w_{jt} = \frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} = \frac{\partial \ln C_t}{\partial \ln E_t} \Big|_{p_t}$$

となり、(24) と整合する。

3.7.2 効用関数に期待される三要件

条件 (R) が、効用関数に通常要請される性質とどう対応するかを整理する。

(1) 局所非飽和 (local nonsatiation) . 任意の $q_t \in \mathbb{R}_{++}^{N_t}$ と任意の $\delta > 0$ に対して、 $\|q'_t - q_t\| < \delta$ かつ $C(q'_t) > C(q_t)$ を満たす q'_t が存在することをいう。需要理論において局所非飽和は、予算制約が等号で成立すること（ワルラス法則）と、効用最大化問題と支出最小化問題の双対性が成り立つために必要な最小限の性質である。

(37) より $\partial C_t / \partial q_{jt} \neq 0$ であれば、 q_{jt} を増やすか減らすかのいずれかで効用が上昇するから、局所非飽和の必要十分条件は

$$\tilde{\epsilon}(q_t, C_t) \neq 0 \iff \sum_{i \in \Theta_t} \theta_{it} \epsilon_i \neq \sigma$$

である。これは条件 (R) より弱い。ただし条件 (R) が成り立たない場合、局所非飽和は「消費量を減らすと効用が上がる」という形で成立するにすぎず、経済的な意味をなさない。したがって実質的に要請すべきは次の単調性である。

(2) 単調性 (monotonicity) . $q'_t \geq q_t$ かつ $q'_t \neq q_t$ ならば $C(q'_t) > C(q_t)$ が成り立つことをいう。内点では条件 (R) がその必要十分条件である。条件 (R) をどこで評価するかにより、次の二段階に分かれる。

(2a) 局所的単調性. 最適点 (すなわち実際に観測される消費・支出配分) では (14) より $\theta_{it} = w_{it}$ であるから、条件 (R) は

$$\frac{\bar{\epsilon} - \sigma}{1 - \sigma} > 0, \quad \bar{\epsilon} \equiv \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i \quad (39)$$

に帰着する。 $0 < \sigma < 1$ のとき $\bar{\epsilon} > \sigma$ である。これは (16) で確認したとおり所得の限界効用が正であること ($\lambda_{2t} > 0$) と、また (24) の効用の総支出弾力性が正であることと、いずれも同値である。

(2b) 大域的単調性. 最適点以外では θ_t は支出シェアと一致せず、単体上の任意の点をとる。実際、次が成り立つ。

補題 1. 任意の $C_0 > 0$ と任意の $\theta \in \Delta^{N_t-1}$ ($\theta_i > 0, \sum_i \theta_i = 1$) に対して、

$$q_i = \left(\frac{\theta_i}{a_i} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} C_0^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{1-\sigma}}$$

と定めれば、 $H(q, C_0) = 1$ であり、かつそのときのウェイトは θ に一致する。

証明. $q_i^{(\sigma-1)/\sigma} = \frac{\theta_i}{a_i} C_0^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma}} = \frac{\theta_i}{a_i} C_0^{-\frac{\epsilon_i - \sigma}{\sigma}}$ であるから、

$$a_i C_0^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} q_i^{(\sigma-1)/\sigma} = a_i C_0^{(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} \cdot \frac{\theta_i}{a_i} C_0^{-(\epsilon_i - \sigma)/\sigma} = \theta_i.$$

両辺を i について足せば $H(q, C_0) = \sum_i \theta_i = 1$ 。■

補題 1 より、 θ を単体の任意の頂点近傍に寄せる消費ベクトルが必ず存在する。したがって消費集合 $\mathbb{R}_{++}^{N_t}$ の全体で条件 (R) が成り立つ必要十分条件は、 θ を各頂点に寄せた極限まで含めて成立すること、すなわち

$$\frac{\epsilon_i - \sigma}{1 - \sigma} > 0 \quad (\forall i \in \Theta_t) \quad (40)$$

である。 $0 < \sigma < 1$ のときこれは $\min_i \epsilon_i > \sigma$ 、 $\sigma > 1$ のときは $\max_i \epsilon_i < \sigma$ を意味する。以下ではこれを大域的正則性条件と呼ぶ。

(3) 準凹性 (quasi-concavity). 無差別曲線が原点に対して凸であること、すなわち上位集合 $\{q : C(q) \geq \bar{C}\}$ が凸集合であることをいう。需要の一階条件が最適解を特徴づけるために必要である。

準凹性を見やすくするため、効用水準に依存する基準量

$$h_i(C_t) \equiv C_t^{\frac{\epsilon_i - \sigma}{1-\sigma}} \quad (41)$$

を導入する。 $h_i(C_t)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} = C_t^{-\frac{\epsilon_i-\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma}} = C_t^{\frac{\epsilon_i-\sigma}{\sigma}}$ であるから、効用関数の定義 (10) は

$$\sum_{i \in \Theta_t} a_i \left(\frac{q_{it}}{h_i(C_t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = 1 \quad (42)$$

と等価に書き直せる。すなわち Non-homothetic CES 型効用関数は、各財の消費量を効用水準依存の基準量 $h_i(C_t)$ で基準化した「有効数量」 $q_{it}/h_i(C_t)$ についての CES である。 $h_i(C_t)$ は「効用水準 C_t に到達するために第 i 財に要求される量の目安」と解釈でき、 h_i の伸びが大きい財ほど奢侈的、小さい財ほど必需的である。

(41) より、 $h_i(\cdot)$ が正値かつ単調増加であることの必要十分条件は

$$\frac{\epsilon_i - \sigma}{1 - \sigma} > 0$$

であり、これは大域的正則性条件 (40) と同一である。この条件のもとで準凹性が成り立つ。

命題 1. $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, $a_i > 0$, かつ大域的正則性条件 (40) が成り立つとき、(10) で定義される $C(q_t)$ は $\mathbb{R}_{++}^{N_t}$ 上で単調増加かつ準凹である。

証明 ($0 < \sigma < 1$ の場合). 単調性は条件 (R) が (40) から従うことによる (θ がいかなる単体上の点であっても $\sum_i \theta_i \epsilon_i > \sigma$)。

準凹性を背理法で示す。 $f(x) \equiv x^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ とおく。 $0 < \sigma < 1$ より $r \equiv (\sigma - 1)/\sigma < 0$ であり、 $f'(x) = rx^{r-1} < 0$, $f''(x) = r(r-1)x^{r-2} > 0$ であるから、 f は $(0, \infty)$ 上で減少かつ凸である。

いま、準凹でないと仮定する。すなわち、ある $q', q'' \in \mathbb{R}_{++}^{N_t}$ と $\alpha \in (0, 1)$ が存在して、 $\bar{q} \equiv \alpha q' + (1 - \alpha)q''$ の効用 $\bar{C} \equiv C(\bar{q})$ が $C' \equiv C(q')$ と $C'' \equiv C(q'')$ のいずれよりも真に小さいとする。

定義より $\sum_i a_i f(\bar{q}_i/h_i(\bar{C})) = 1$ である。 f の凸性 (Jensen の不等式) より

$$f\left(\frac{\bar{q}_i}{h_i(\bar{C})}\right) = f\left(\alpha \frac{q'_i}{h_i(\bar{C})} + (1 - \alpha) \frac{q''_i}{h_i(\bar{C})}\right) \leq \alpha f\left(\frac{q'_i}{h_i(\bar{C})}\right) + (1 - \alpha) f\left(\frac{q''_i}{h_i(\bar{C})}\right).$$

また $\bar{C} < C'$ と h_i の単調増加性より $h_i(\bar{C}) < h_i(C')$ 、したがって $q'_i/h_i(\bar{C}) > q'_i/h_i(C')$ であり、 f が減少関数であることから

$$f\left(\frac{q'_i}{h_i(\bar{C})}\right) < f\left(\frac{q'_i}{h_i(C')}\right).$$

q'' についても同様である。以上を合わせると

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in \Theta_t} a_i f\left(\frac{\bar{q}_i}{h_i(\bar{C})}\right) \leq \alpha \sum_{i \in \Theta_t} a_i f\left(\frac{q'_i}{h_i(\bar{C})}\right) + (1 - \alpha) \sum_{i \in \Theta_t} a_i f\left(\frac{q''_i}{h_i(\bar{C})}\right) \\ &< \alpha \sum_{i \in \Theta_t} a_i f\left(\frac{q'_i}{h_i(C'')}\right) + (1 - \alpha) \sum_{i \in \Theta_t} a_i f\left(\frac{q''_i}{h_i(C'')}\right) = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

となり、 $1 < 1$ という矛盾を得る。よって $C(q_t)$ は準凹である。 $\sigma > 1$ の場合は $r \in (0, 1)$ より f が増加かつ凹となるので、上の二つの不等号の向きをともに反転させれば同様に矛盾が導かれる。■

以上をまとめると、単調性の全域版と準凹性はいずれも同一の条件 (40) に帰着し、局所非飽和はそれより弱い条件で足りる。本研究では (40) を大域的正則性条件、(39) を局所的単調性条件と呼び分ける。この定式化は Hanoch (1975) の陰的加法性モデルにおける正則性の議論に由来し、Comin et al. (2021) は同等の制約をパラメーター $\varepsilon_i > 0$ (彼らの表記) として課している。実際、Comin et al. (2021) の効用水準を U_t 、その正値かつ単調増加な変換を $g(\cdot)$ と書くと、両者の対応は $C_t = g(U_t)^\lambda$ ($\lambda > 0$) とおくと

$$\varepsilon_i = \frac{\lambda(\epsilon_i - \sigma)}{1 - \sigma}$$

で与えられるから、 $\varepsilon_i > 0$ は (40) と同値である。

3.7.3 規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ の役割

前節で述べたとおり、非相似拡大性パラメーター ϵ_i は財間の差 $\epsilon_i - \epsilon_j$ のみが需要に現れるため、その水準には規格化が必要である。ここで重要なのは、水準の選び方が局所的単調性条件 (39) の成否を左右するという点である。たとえば基準財について $\epsilon_b = 0$ と恣意的に固定すると、 $\bar{\epsilon}$ が σ を下回り、 $0 < \sigma < 1$ のもとで局所条件が破れる可能性がある。

本研究の実証分析 (第 4.2 節) で採用するマクロ整合的規格化

$$\bar{\epsilon} = \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i = 1$$

は、 $0 < \sigma < 1$ である限り (39) を $1 > \sigma$ として構成上必ず満たす。すなわちこの規格化は、単に総支出弾力性の解釈を簡明にする ($\eta_i = \epsilon_i$ となる) だけでなく、局所的単調性を構造的に保証する装置でもある。

3.7.4 総支出弾力性の下限としての解釈

大域的正則性条件 (40) は、需要の総支出弾力性を用いてより直接的に述べることができる。需要の所得（総支出）弾力性 (25) を σ からの乖離として整理すると、

$$\begin{aligned}\eta_i - \sigma &= (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} + 1 - \sigma = (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{1 - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma} + (1 - \sigma) \\ &= (1 - \sigma) \cdot \frac{(\epsilon_i - \bar{\epsilon}) + (\bar{\epsilon} - \sigma)}{\bar{\epsilon} - \sigma} = (1 - \sigma) \cdot \frac{\epsilon_i - \sigma}{\bar{\epsilon} - \sigma}\end{aligned}\quad (43)$$

を得る。局所条件 (39) が成り立つとき $(1 - \sigma)/(\bar{\epsilon} - \sigma) > 0$ であるから、(43) より

$$\eta_i > \sigma \iff \frac{\epsilon_i - \sigma}{1 - \sigma} > 0 \quad (44)$$

が成り立つ。すなわち、大域的正則性条件は、すべての財の総支出弾力性が代替弾力性 σ を上回るという条件と同値である ($0 < \sigma < 1$ の場合)。

言い換えれば、共通の代替弾力性 σ を課す Non-homothetic CES 型効用関数は、 σ を下回る総支出弾力性を表現できない。 σ は当該関数形が表現しうる必需性の下限である。この下限が生じる理由は、補償需要関数を $q_{it} = a_i^\sigma (p_{it}/E_t)^{-\sigma} \times (\text{効用依存項})$ の形に整理すれば見やすい。総支出 E_t の増加は、第一に価格を総支出で基準化する項 $(p_{it}/E_t)^{-\sigma}$ を通じて、非相似拡大性とは無関係にすべての財に共通して弾力性 σ 分の需要増をもたらす。第二に効用水準 C_t の上昇を通じて、 ϵ_i に応じた非相似拡大的な需要増をもたらす。第二の経路が (40) のもとで常に正の寄与をするため、合計は σ を下回りえない。

なお、規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ のもとでは (43) は $\eta_i - \sigma = \epsilon_i - \sigma$ 、すなわち $\eta_i = \epsilon_i$ に帰着し、既述の性質と整合する。

(44) は実証的に検証可能な制約である。価格項側から推定される $\hat{\sigma}$ と、効用項側から復元される $\{\hat{\eta}_i\}$ は互いに独立な変動を用いて識別されるため、 $\min_i \hat{\eta}_i > \hat{\sigma}$ が成り立つか否かは、関数形の妥当性に関する一種の過剰識別検定として読むことができる。この点は第 4.2.7 節で数値的に確認する。

3.8 効用水準 C_t と実質消費インデックス

(10) の C_t は陰関数として定義された効用水準である。これに対して第 4.2 節以降の推定では、名目総消費支出を価格指数でデフレートして構築した実質消費支出インデックスを $\ln C_t$ に代入する。本節では、この対応がどのような条件のもとで正当化されるかを整理する。

まず、効用水準・名目総消費支出・価格の間に成り立つ厳密な恒等式を導く。支出関数 (23) の分子および分母の括弧内はいずれも Ω_t/C_t に等しいから、

$$E_t = \left(\frac{\Omega_t}{C_t}\right)^{1-\frac{\sigma}{\sigma-1}} C_t = \left(\frac{\Omega_t}{C_t}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} C_t$$

である。両辺を $1-\sigma$ 乗して整理すると

$$C_t^\sigma = \Omega_t E_t^{\sigma-1} \quad (45)$$

を得る。(45) の対数を価格一定のもとで $\ln E_t$ について偏微分し、(21) を用いれば $(\sigma - \bar{\epsilon}) \partial \ln C_t = (\sigma - 1) \partial \ln E_t$ 、すなわち (24) が直ちに得られる。

ここで、実質消費インデックスとは、名目総消費支出をある価格指数で除した量、すなわち $C_t = E_t/P(p_t)$ の形に表される量である。この表現が可能であることは、価格を一定としたとき C_t が E_t について 1 次同次であること、すなわち $\partial \ln C_t / \partial \ln E_t|_{p_t} = 1$ と同値である。(24) より、 $\sigma \neq 1$ のもとでこれは

$$\frac{1-\sigma}{\bar{\epsilon}-\sigma} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\epsilon} = 1$$

と同値である。すなわち、マクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ は、総支出弾力性の解釈を簡明にし局所的単調性を保証する (第 3.7 節) だけでなく、NH-CES の効用水準をデフレーター型の実質消費インデックスとして表現することを可能にする唯一の規格化でもある。ただし $\bar{\epsilon} = \sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i$ は支出シェアに依存するため、この同値関係は規格化を課した点で厳密に成立し、そこから離れるにつれて近似となる。

実証分析では、価格指数として都道府県別の Törnqvist 価格指数 P_{rt}^T を使い、 $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ として実質消費インデックスを構築する。Törnqvist 指数は superlative 指数であり、任意の二回連続微分可能な単位費用関数を二次の精度で近似する (Diewert, 1976)。したがって P_{rt}^T は NH-CES の単位費用関数の二次近似であり、 C_{rt} はそれに対応する効用水準の測度となる。

なお (45) は、 C_t を観測可能量のみで表現する別の方法も示唆する。基準財の支出シェアから $\Omega_t = a_b^\sigma p_{bt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_b} / w_{bt}$ を代入して整理すれば

$$(\sigma - \epsilon_b) \ln C_t = (\sigma - 1) \ln \frac{E_t}{p_{bt}} - \ln w_{bt} + \sigma \ln a_b \quad (46)$$

となり、 C_t は名目総消費支出・基準財価格・基準財の支出シェアから解析的に定まる。Comin et al. (2021) はこの関係を用いて C_t を推定式から消去し、観測可能量のみからなる体系を一般化積率法 (GMM) で推定している。

本研究がこの方法を採らず外生的な価格指数によるデフレートを用いるのは、(46) を通じた経路が本研究のデータでは数値的に成立しないためである。(46) を $\ln C_t$ について解くと $\ln w_{bt}$ の係数は $-1/(\sigma - \epsilon_b)$ であり、基準財の支出シェアの測定誤差はこの倍率で増幅される。本研究の主推定では $\hat{\sigma} - \hat{\epsilon}_b = 0.427 - 0.405 = 0.022$ (表 5) であるから、増幅係数は 45.5 に達する。すなわち基準財シェアの 1% の測定誤差が $\ln C_t$ の 45% の誤差となる。実際、推定されたパラメーターを (46) に代入して都道府県別の $\ln C_{rt}$ を構成すると、2015 年から 2024 年にかけての変化は 47 都道府県平均で +3.13 (都道府県間の標準偏差 3.33) となり、実質消費が期間中に 22 倍になったという解を与える。Törnqvist 指数によるデフレートで得た系列 (同 -0.049、標準偏差 0.080) との相関は 0.06 にすぎない*3。

この悪条件性は手法の優劣ではなく、データの変動量に由来する。Comin et al. (2021) が対象とする国際横断・長期のデータでは所得水準の変動が桁違いに大きく、 $\epsilon_i - \epsilon_b$ が $\sigma - \epsilon_b$ に対して十分に大きいため、閉形式の経路が識別力をもつ。これに対し本研究の都道府県パネル (2015–2024 年) では実質消費支出の変動係数が 8.5% (表 2) にとどまり、同じ経路は機能しない。これに対し Törnqvist 指数による実質化は全 10 費目の情報を用いるため基準財の選択に頑健であり、かつ上述のとおり真の生計費変化を二次の精度で近似する。二段階手続きがもたらす解釈上の代償については第 5.4 節で論じる。

以上より、本研究において「効用水準」と「実質消費 (インデックス)」は同一の対象 C_t を指す。前者はモデル内部での定義 (10) を、後者はその観測上の測度 $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ を強調した呼び方である。以下では混同を避けるため、モデルの構成要素を指す場合は「効用水準 C_t 」、データ上の系列を指す場合は「実質消費インデックス C_{rt} 」と記す。

3.9 構造パラメーターの推定式

常の需要関数の支出シェア表現 ((19) 式) で、以下の表現を導いた。

$$w_{it} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{\sum_{j \in \Theta_t} a_j^\sigma p_{jt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_j}}.$$

*3 この計算は Comin et al. (2021) の推定手法を再現したものではない。同論文は係数間制約を課したうえで全パラメーターを GMM で同時推定するのであって、推定値を (46) に代入して C_t を構成するわけではない。ここで示したのは、推定値の近傍において観測量から $\ln C_t$ への写像がどれほど悪条件かという診断である。

ここで、第 i 財の支出シェアと基準財（第 b 財）の支出シェアの比を取れば、以下の様に整理できる。

$$\frac{w_{it}}{w_{bt}} = \frac{a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_i}}{a_b^\sigma p_{bt}^{1-\sigma} C_t^{\epsilon_b}}$$

両辺の対数をとれば、構造パラメーターの推定式を導くことができる。

$$\ln\left(\frac{w_{it}}{w_{bt}}\right) = \sigma \ln\left(\frac{a_i}{a_b}\right) + (1 - \sigma) \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{bt}}\right) + (\epsilon_i - \epsilon_b) \ln(C_t). \quad (47)$$

この需要方程式の推定方法と識別戦略については、実証分析の節で解説する。

4 日本の食料品エンゲル係数の実証分析

4.1 データ

本分析では、総務省『家計調査（二人以上の世帯のうち勤労者世帯）』および同省『小売物価統計調査』、『消費者物価指数（全国）』のデータを統合し、2014 年から 2024 年までの 47 都道府県・10 大分類パネルデータ（品目あたり観測数 $N = 517$ 、 $R = 47$ 都道府県 $\times T = 11$ 年）を構築した。勤労者世帯を分析対象とするのは、都道府県別に支出・世帯属性が整合的かつ継続的に取得でき、構造推定に必要な横断面・時系列の変動を確保できるためである。支出項目は総務省が定める 10 大分類（食料、住居、光熱・水道、家具・家事用品、被服及び履物、保健医療、交通・通信、教育、教養娯楽、その他の消費支出）に従い、このうち「光熱・水道」を基準財（Numeraire）として、これを除く 9 財を対象財とする。

価格指数の構築には注意を要する。総務省『小売物価統計調査』が公表する消費者物価地域差指数 d_{irt} （第 i 財・都道府県 r ・時点 t ）は、各年において都道府県平均が 100 となるよう基準化されている。したがって d_{irt} は都道府県間の価格差（クロスセクション方向）の情報を持つ一方、価格の時系列変動の情報を含まない。そこで、第 i 財・時点 t の全国消費者物価指数を π_{it}^{nat} とし、地域差指数にこれを乗じた地域別価格指数

$$p_{irt} = \frac{d_{irt} \pi_{it}^{\text{nat}}}{100}$$

を実証分析に用いる。これにより、基準財を第 b 財（光熱・水道）とする相対価格は

$$\frac{p_{irt}}{p_{brt}} = \frac{d_{irt} \pi_{it}^{\text{nat}}}{d_{brt} \pi_{bt}^{\text{nat}}}$$

となり、都道府県間・時系列の両方向で比較可能な相対価格インデックスが得られる。

世帯属性の地域的・時間的な異質性をコントロールするため、世帯人員 (hh_size)、世帯主年齢 (hh_age)、持家率 (homeownership_rate) を家計属性変数として投入する。実質消費支出インデックス C_{rt} は、家計調査の支出シェアを用いた都道府県別の Törnqvist 物価指数 (2014 年基準) P_{rt}^T を構築し、都道府県別の名目総消費支出 E_{rt} をこれでデフレートして $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ として算出した (理論部の E_t に都道府県添字 r を付したものである)^{*4}。Törnqvist 物価指数は、隣接する 2 期の支出シェアの算術平均を対数価格相対 (log price relative) のウェイトとする連鎖型の物価指数であり、本研究では

$$\ln P_{rt}^T - \ln P_{r,t-1}^T = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2} (w_{irt} + w_{ir,t-1}) \ln \frac{p_{irt}}{p_{ir,t-1}}, \quad P_{r,2014}^T = 1,$$

として 2014 年を基準 (指数 = 1) に各年へ累積的に構成する^{*5}。ここで w_{irt} は都道府県 r ・時点 t における第 i 財 (光熱・水道を含む全 10 分類) の支出シェア、 p_{irt} は前述の地域別価格指数である。以下では記法を簡潔にするため都道府県添字 r を省略し C_t と表記する。計量経済学的な推定に先立ち、 $\ln C_t$ およびすべての家計属性変数について、サンプル平均を差し引く平均中心化 (mean-centering) を施した。これにより、推定方程式の定数項 (財ダミーの係数) が「平均的な所得水準・世帯属性をもつ標準的な勤労者世帯」の消費選好を表すように位置づけられ、外挿バイアスによる嗜好パラメーターの歪みを排除している。

表 2 は、推計に用いた主要変数の記述統計である。Panel A は各 10 大分類の支出シェアと価格指数の平均および標準偏差を示す。日本の勤労者世帯において食料の支出シェアが最も大きく (平均 0.244)、次いでその他の消費支出 (0.198)、交通・通信 (0.163) と続き、食料が家計消費の基盤を成すことがわかる。Panel B は都道府県・年レベルに集約した変数 (実質消費支出、世帯人員、世帯主年齢、持家率) の記述統計であり、全体

^{*4} E_{rt} は『家計調査』の消費支出であり、実収入や可処分所得ではない。貯蓄をゼロと仮定すれば両者は一致し、総支出弾力性は所得弾力性に一致するが、本研究の分析はその仮定を必要としない。実際、二人以上の世帯のうち勤労者世帯の平均消費性向は 2013 年の 70.8% から 2024 年の 62.2% へ低下しており、2024 年には実質可処分所得が増加する一方で実質消費支出は減少している (総務省『家計調査年報 (家計収支編) 2024 年』および内閣府の分析による)。したがって本研究では E_{rt} を所得と同一視しない。

^{*5} Diewert (1976) によれば、superlative (超越的) 指数とは、任意の二回連続微分可能な生計費 (単位費用) 関数を二次の精度で近似しうる柔軟な関数形 (flexible functional form) に対して厳密 (exact) となる指数をいう。その含意として、消費者の真の選好の具体的な関数形を知らずとも、観測される価格と支出シェアのみから真の生計費変化を二次の精度で復元できる。Törnqvist 指数は、トランスログ (translog) 型の単位費用関数に対して厳密な superlative 指数の代表例であり (Fisher 理想指数と並ぶ)、固定ウェイトの Laspeyres 指数と異なり各期の支出シェア変化を取り込むため代替バイアス (substitution bias) を構造的に緩和する。指数の原型は Törnqvist (1936)、superlative 指数としての理論的基礎は Diewert (1976)、実務的かつ包括的な解説は IMF et al. (2020) を参照されたい。

(Overall)・都道府県間 (Between)・都道府県内 (Within) の標準偏差に分解して提示している。これにより、構造推定に必要な時系列および横断面の十分な変動が存在することが確認できる。

表 2 記述統計 (Summary Statistics)

Panel A: 品目レベルの変数 ($N = 517$ per item)				
分類 (Item)	支出シェア (w_{irt})		価格指数 (p_{irt} , 光熱・水道=100)	
	Mean	SD	Mean	SD
食料	0.244	0.020	100.8	7.87
その他の消費支出	0.198	0.027	101.1	2.74
交通・通信	0.163	0.026	98.1	3.03
教養娯楽	0.092	0.010	98.6	5.47
光熱・水道 (基準財)	0.072	0.010	105.6	8.60
住居	0.063	0.020	92.8	9.37
教育	0.053	0.017	100.8	9.91
保健医療	0.039	0.006	98.5	2.44
被服及び履物	0.038	0.006	100.4	5.49
家具・家事用品	0.037	0.005	101.4	7.89

Panel B: 市場・世帯レベルの変数 ($N = 517$ / $R = 47, T = 11$)				
変数 (Variable)	Mean	Standard Deviation		
		Overall	Between	Within
実質消費支出 (円)	306,046.5	26,162.1	20,161.2	16,907.3
世帯人員 (人)	3.29	0.154	0.092	0.124
世帯主年齢 (歳)	49.37	1.683	0.867	1.448
持家率 (%)	75.55	10.388	8.679	5.834

注: Panel A は各 10 大分類における支出シェアと価格指数の平均および標準偏差を示す。価格指数については基準年を 100 として算出したインデックスを用いている。Panel B は都道府県・年レベル (47 都道府県 $\times$ 11 年) に集約した変数の記述統計であり、全体 (Overall)、都道府県間 (Between)、都道府県内 (Within) の標準偏差に分解して提示している。実質消費支出は、各都道府県の名目総消費支出 E_{rt} を Törnqvist 物価指数 (2014 年基準) でデフレートした実質総消費 C_{rt} である。

続いて、近年の急激なエンゲル係数上昇の背景にある価格環境の変化を確認する。図 2 は、家計調査の 10 大分類すべてについて、都道府県別の価格指数 p_{irt} の推移 (灰色の細線が各都道府県、赤の太線が全国平均) を示したものである。生活必需品を代表する「食料」および「光熱・水道 (エネルギー)」が、2010 年代後半から 2020 年代にかけて他の分類に比して突出した上昇トレンドを描いている点が際立つ。これらはいずれも家計にとって代替が困難な基礎的消費である。対照的に、相対的に裁量的消費の性格が強い「教育」

をはじめ、他の多くの分類は安定した推移を示しており、財の性質によって直面するインフレ圧力が大きく異なっていることがうかがえる。

このような生活必需品の相対価格の急激な上昇（価格効果）と、それに伴う実質消費支出の目減り（所得効果）が同時に進行している事実が、近年の日本の家計の予算制約を深刻に圧迫し、基礎的消費への支出偏重を通じてエンゲル係数を押し上げる原動力となっていると考えられる。次節以降では、これら 2 つのメカニズムの寄与を、Non-homothetic CES 需要システムを用いて厳密に定量化していく。

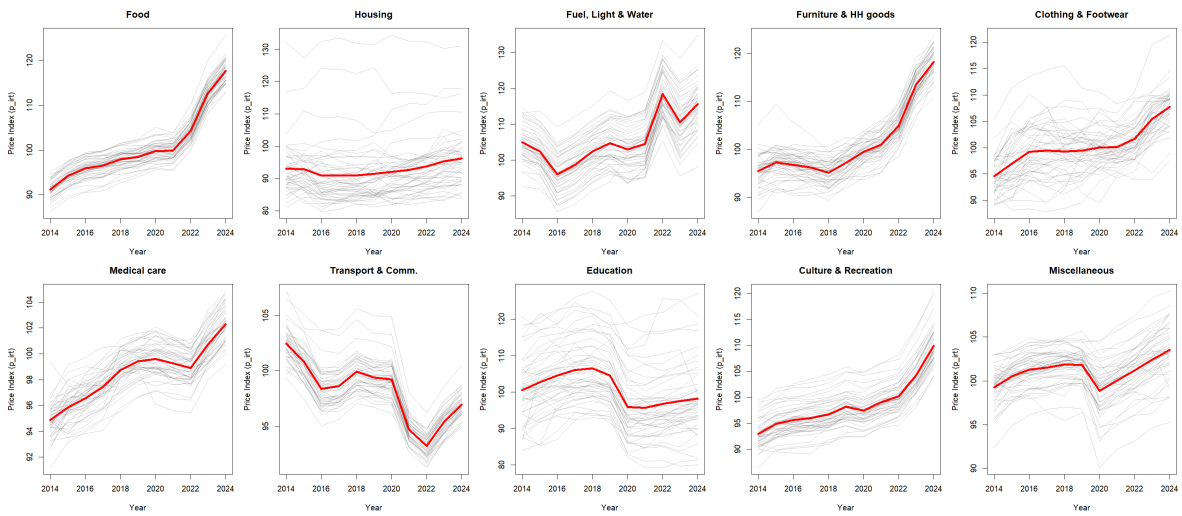


図 2 10 大分類の都道府県別価格指数 p_{irt} の推移（灰色：各都道府県，赤：全国平均，2014–2024 年）

4.2 構造パラメーターの推定

本研究では、Comin et al. (2021) に基づく Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを適用し、標準的なホモセティック CES モデルとの比較を通じて構造パラメーターを推定する。推定標本は、ラグ操作変数（後述）の生成によって初年度（2014 年）が脱落するため、9 財 $\times$ 47 都道府県 $\times$ 10 年（2015 年–2024 年）の合計 $N = 4,230$ 観測である。標準誤差はすべて 47 都道府県を単位とするクラスター頑健標準誤差（CR2）で算出した。なお以下では、推定値・推定量にはハットを付して母数と区別する（ $\hat{\sigma}$ 、 $\hat{\epsilon}_i$ 、 $\hat{\eta}_i$ ）。ハットのない記号は母数を表し、パラメーターについての命題や理論的な恒等式はハットなしで記す。ただしマクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ は推定に課す制約であるため、 $\bar{\epsilon}$ にはハットを付さない。

4.2.1 標準的 CES モデル（ベンチマーク）

所得効果を完全に排除し、家計の需要シフトがすべて相対価格の変動（価格効果）のみに帰着すると仮定する標準的なホモセティック CES 効用関数をベンチマークとして定式化する。このモデルではすべての財における需要の総支出弾力性が厳密に 1 に制約される。(9) に基づく、基準財 b （光熱・水道）に対する任意の財 i の対数支出シェア比の推定方程式は以下の通りである。

$$\ln \left(\frac{w_{irt}}{w_{brt}} \right) = \sigma \ln \left(\frac{a_i}{a_b} \right) + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{irt}}{p_{brt}} \right) + \Gamma_i \mathbf{X}_{irt} + u_{irt} \quad (48)$$

ここで r は都道府県、 t は年を示し、 $c_i = \sigma \ln(a_i/a_b)$ は各財固有の切片（Taste parameter）、 $\mathbf{X}_{irt}$ は平均中心化済みの家計属性変数ベクトル、 Γ_i は財固有の属性効果係数、 u_{irt} は平均 0 の需要ショックである。

なお、この推定式には対数価格比の内生性という問題があるが、その対処は次節の NH-CES モデルと共通であるため、第 4.2.3 節で一括して論じる。

4.2.2 Non-homothetic CES モデルの推定式

第 3.6.3 節までに整理した NH-CES 需要システムを、推定可能な形に書き下す。推定式 (47) に家計属性と誤差項を加えると、基準財 b に対する任意の財 i の対数支出シェア比の推定方程式は次の通りである。

$$\ln \left(\frac{w_{irt}}{w_{brt}} \right) = \sigma \ln \left(\frac{a_i}{a_b} \right) + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{irt}}{p_{brt}} \right) + (\epsilon_i - \epsilon_b) \ln C_{rt} + \Gamma_i \mathbf{X}_{irt} + u_{irt} \quad (49)$$

標準的 CES との差は第 3 項 $(\epsilon_i - \epsilon_b) \ln C_{rt}$ であり、これが非相似拡大性（所得効果）を捉える。

(49) の係数のうち、価格比の係数 $(1 - \sigma)$ は全財に共通であるが、切片 $\sigma \ln(a_i/a_b)$ 、実質消費インデックスの係数 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ 、および家計属性の係数 Γ_i はいずれも財固有である。推定にあたっては、(49) を 9 つの対象財についてプールした単一の方程式として推定し、財固有の係数はすべて財ダミーとの交差項として表現する。第 i 財のダミー変数を D_i ($i = 1, \dots, 9$) と書けば、推定される回帰式は

$$\ln \left(\frac{w_{irt}}{w_{brt}} \right) = \sum_{i=1}^9 c_i D_i + (1 - \sigma) \ln \left(\frac{p_{irt}}{p_{brt}} \right) + \sum_{i=1}^9 \beta_i (D_i \times \ln C_{rt}) + \sum_{i=1}^9 D_i \Gamma_i \mathbf{X}_{irt} + u_{irt} \quad (50)$$

の形をとる。ここで $c_i = \sigma \ln(a_i/a_b)$ 、 $\beta_i = \epsilon_i - \epsilon_b$ である。すなわち $(\epsilon_i - \epsilon_b) \ln C_{rt}$ の項は、この単一の方程式に含まれる $D_i \times \ln C_{rt}$ という 9 本の説明変数として現れ、その係数 β_i が財ごとに推定される。以下ではこの 9 本の説明変数を「効用交差項」と呼ぶ。財ごとに方程式を分けて推定するわけではない。価格比の係数 $(1 - \sigma)$ は 9 財に共通であり、プールした推定によって始めて σ が識別されるためである。第 4.2.4 節で論じる多重共線性は、この 9 本の説明変数のあいだに生じるものである。

4.2.3 識別戦略：内生性への対処と操作変数

(50) には 2 種類の内生的な説明変数が含まれる。本節では両者への対処を一括して述べる。標準的 CES の推定式は (50) から効用交差項を除いたものであるから、以下の議論のうち価格項に関する部分がそのまま当てはまる。

■内生性の所在 第一は対数価格比 $\ln(p_{irt}/p_{brt})$ であり、その係数が $(1 - \sigma)$ を通じて代替の弾力性を規定する。この変数の内生性には 2 つの経路がある。ひとつは同時性のバイアス (simultaneity bias) であり、ある都道府県における特定の財への一時的な需要ショック $u_{irt} > 0$ が地域市場の支出シェア w_{irt} と価格 p_{irt} を同時に押し上げ、価格係数を上方に歪めて代替の弾力性 σ を過小評価させる。もうひとつは、家計調査の支出データから価格指数を構築する過程で不可避免的に生じる測定誤差 (measurement error) に伴う減衰バイアスであり、価格係数をゼロ方向へ縮小させて σ を 1 に近づける。

第二は NH-CES に固有の効用交差項 $D_i \times \ln C_{rt}$ であり、その係数が相対非相似拡大性 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ を与える。実質消費インデックスは $\ln C_{rt} = \ln E_{rt} - \ln P_{rt}^T$ として構築されるが、Törnqvist 価格指数のウェイトは支出シェアそのものであるから (第 4.1 節)、需要ショック u_{irt} は $\ln P_{rt}^T$ を通じて $\ln C_{rt}$ と相関しうる。加えて、名目総消費支出 E_{rt} は標本調査に基づく推計値であり測定誤差を含むため、ここでも減衰バイアスが生じる。

■価格項の操作変数：空間的 Hausman 型 IV 価格の内生性バイアスを排除し、純粋な供給側 (コストプッシュ型) の価格変動に対する家計の代替行動を識別するため、本研究では空間的 Hausman 型操作変数法 (Spatial Hausman-type IV) を導入する^{*6}。具体的には、当該都道府県 r を除く他のすべての都道府県 ($r' \neq r$) における同時期の平均価格比

^{*6} 他市場 (本研究では他都道府県) の価格を当該市場価格の操作変数として用いる手法は Hausman 型操作変数と呼ばれ、Hausman et al. (1994) および Hausman (1996) に由来する。識別の前提は、地域横断的な価格の共変動が地域固有の需要ショックではなく全国共通の費用ショック (投入価格・流通費用等) を反映することである。この前提が全国規模の需要ショック (例：全国的な広告・季節要因) の下で破られる点については Nevo (2001) を参照。

を操作変数 IV_{irt} として構築する。

$$IV_{irt} = \ln \left(\frac{\frac{1}{R-1} \sum_{r' \neq r} p_{r'it}}{\frac{1}{R-1} \sum_{r' \neq r} p_{r'bt}} \right), \quad R = 47 \quad (51)$$

この操作変数は、全国共通の供給側ショック（国際的な原材料価格・為替・エネルギーコスト等）を通じて自県の価格と強く相関する一方（関連性条件）、自県固有の需要ショック u_{irt} とは無相関である（除外制約）。

■効用交差項の操作変数：1 期ラグの実質消費インデックス 効用交差項に対しては、1 期ラグの実質消費インデックスと財ダミーとの交差項 $D_i \times \ln C_{r,t-1}$ を操作変数として用いる。関連性条件は、実質消費インデックスが都道府県内で強い系列相関をもつことによって満たされる。除外制約は、当期の需要ショック u_{irt} が系列相関をもたないという仮定のもとで成立する。すなわち $\ln C_{r,t-1}$ は前期の価格と支出から構成されるため当期のショックとは無相関である一方、当期の $\ln C_{rt}$ とは強く相関する。この操作変数の生成のために標本の初年度（2014 年）が脱落し、推定標本は 2015–2024 年の 10 年間となる。

■識別の次数と推定 内生変数は、価格比 1 本と効用交差項 9 本の計 10 本である。これに対応する除外操作変数も、(51) の空間的 Hausman 型操作変数 1 本と $D_i \times \ln C_{r,t-1}$ の 9 本の計 10 本であるから、ちょうど識別（just-identified）の 2 段階最小二乗推定となる。第 1 段階では各内生変数を全操作変数および全外生変数（財ダミー・家計属性・固定効果）に回帰して理論的予測値を得、第 2 段階でその予測値を用いて構造パラメーターを一致推定する。なお、9 つの財ダミーをすべて識別しダミースキップの罠（dummy variable trap）を回避するため、グローバル切片を排したシステム推定を行う。固定効果の指定については、それが σ と $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ とで相反する作用をもつため、次節で独立に論じる。

4.2.4 固定効果仕様と識別の非対称性

式 (49) の推定にあたっては、空間的な固定効果（FE）の選択が効用項側パラメーター $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ と価格項側パラメーター σ とで相反する作用を持つことが判明した。この非対称性は本研究の識別戦略の中核をなすため、加法的な都道府県 FE（pref、47 ダミー）、地方ブロック FE（region、9 ブロック；表 3）、FE なし（none）の 3 仕様を比較する。

第一に、効用項側 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ の識別である。加法的な都道府県 FE を含めることは、被説明変数と説明変数の双方から都道府県ごとの平均を差し引くこと（within 変換）に等しい。この変換を効用交差項 $D_i \times \ln C_{rt}$ に施すと、差し引かれる平均は $\frac{1}{J} \overline{\ln C_r}$ （ J は財数）となり、9 本のすべてに同一の成分が加わることになる。この共通成分のために 9 本

表3 都道府県と地方ブロックの対応 (region 固定効果, 9 ブロック)

地方ブロック	都道府県数	都道府県
北海道	1	北海道
東北	6	青森・岩手・宮城・秋田・山形・福島
関東	9	茨城・栃木・群馬・埼玉・千葉・東京・神奈川・ 山梨・長野
北陸	4	新潟・富山・石川・福井
東海	4	岐阜・静岡・愛知・三重
近畿	6	滋賀・京都・大阪・兵庫・奈良・和歌山
中国	5	鳥取・島根・岡山・広島・山口
四国	4	徳島・香川・愛媛・高知
九州・沖縄	8	福岡・佐賀・長崎・熊本・大分・宮崎・鹿児島・ 沖縄
計	47	

の交差項は互いに強く相関し、結合としては有意でも個別の ϵ_i を分離できなくなる。実際、都道府県 FE 仕様では結合 Wald 検定が $\chi^2(9) = 60.38$ ($p = 1.1 \times 10^{-9}$ 、表 4) と高度に有意であるにもかかわらず、個別に有意な係数は一つもない。さらに点推定の符号の並びが経済的な予想と逆になる（食料・家具が負、すなわちエネルギーより奢侈的という不整合が生じる）。これに対し FE を地方ブロックに粗くする、あるいは外すと、9 本の交差項どうしの相関が弱まり、経済的に整合的な ϵ_i が個別有意に回復する。

この現象には、係数間の共線性という推定上の問題にとどまらない、より根本的な背景がある。加法的な都道府県 FE を含めることは、効用項側の識別を都道府県内の時系列変動のみに限定することを意味する。ところが本研究のデータでは、この次元に識別情報がほとんど存在しない。

実質消費インデックスの都道府県内時系列成分（都道府県平均からの偏差）について 1 階の系列相関を推定すると、 $\hat{\rho} = 0.045$ ($t = 0.99$ 、 $N = 470$) であり、系列相関はほぼ認められない。これは持続的な経済変動の特徴ではなく、標本誤差の特徴である。『家計調査』の標本は全国 168 市町村・8,076 世帯であり、1 都道府県あたり平均 170 世帯程度にすぎない。標本は毎年独立に抽出されるため、都道府県・年の実質消費には系列相関をもたない標本誤差が乗る。都道府県平均は 10 年分の平均であるからこの誤差は約 $1/\sqrt{10}$

に縮小するのに対し、平均を除去した後に残る時系列成分には誤差がそのまま残る*7。

この点は操作変数の強度に直接現れる。効用交差項を都道府県内成分と都道府県平均成分に分解し、前者を1期ラグで操作する仕様を推定すると、9本の効用交差項に対する第1段 F 値は 0.34 から 3.69、部分決定係数は 0.001 から 0.009 にとどまり、複数内生変数の弱識別を測る Cragg–Donald 統計量は 0.058 である。同一仕様において価格比に対する空間的 Hausman 操作変数の第1段 F 値が 214.2、主推定 (region) では 1,137.1 であることと比べると、2桁から3桁の開きがある*8。すなわち、都道府県 FE 仕様において ϵ_i が識別されないのは、共線性という推定上の問題であると同時に、識別を担う都道府県内の変動に情報が存在しないというデータ上の問題でもある。この点は第 4.2.5 節で改めて論じる。

第二に、価格項側 σ の識別である。基準財である光熱・水道の都道府県間のシェア差は気候要因に強く規定されている。空間的 Hausman 操作変数は自県固有の需要ショックを除去できるが、こうした時間を通じて変化しない都道府県固有の異質性までは除去できない。そのため空間的な統制を粗くするほど、この交絡成分が誤差項に残って価格比と関連し、 $\hat{\sigma}$ は仕様を粗くするにつれて単調に変化する (表 4)。 σ に関しては、交絡のコントロールが最も強い都道府県 FE 仕様が相対的に信頼できる。

効用項側は FE を外すこと、価格項側は FE を残すことが望ましいという相反する要請に対し、本研究は折衷点として地方ブロック FE (region) を主推定とする。この仕様では ϵ_i が経済的に整合的な序列で、かつ概ね個別有意に回復し (後述の表 5)、 σ も極端な値をとらない。都道府県 FE 仕様では価格項側が過剰に統制されるため σ が識別されない。 σ が識別される region ($\hat{\sigma} = 0.427$) と none ($\hat{\sigma} = 0.428$) の推定値はほぼ一致し、いずれも $\hat{\sigma} < 1$ (粗補完) である。後続の要因分解では、所得チャネルの大きさは $\bar{\epsilon} = 1$ の規格化により σ に依存せず、価格チャネルの大きさは $(1 - \sigma)$ に比例する。したがって価格効果が所得効果を上回るという定性的な順序は推定値の近傍で安定であり、この順序が反転するには σ が 0.9 程度である必要があって、実際の推定値 0.427 とは大きく隔たっている。

*7 総務省統計局も『家計調査』の利用にあたって、都道府県別・県庁所在市別などの結果については「結果によっては信頼性が低いことがあります」と注意を促している。実際、都道府県平均の安定性は高く、前半5年の平均と後半5年の平均の相関は +0.80 である。

*8 都道府県平均を除去する変換は系列相関の推定値と第1段の説明力をいずれも機械的に $1/T$ のオーダーで下方に偏らせる。ただし $T = 10$ のもとでその大きさは 0.1 程度であり、上記の桁の差を説明しうるものではない。

表 4 固定効果仕様の比較 (NH-CES, 2SLS, CR2)

仕様	$\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$	第 1 段 F	結合 Wald $\chi^2(9)$	p 値	個別有意 ϵ_i
都道府県 FE (pref)	-0.05 [†]	1477.5	60.38	1.1×10^{-9}	0 / 9
地方ブロック FE (region、主推定)	0.427	1137.1	80.23	1.5×10^{-13}	4 / 9
FE なし (none)	0.428	468.7	80.56	1.3×10^{-13}	3 / 9

注: $\hat{\sigma}$ は価格比係数 $\hat{\beta}_p$ から $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ として算出。第 1 段 F は価格操作変数 (空間的 Hausman IV) に関する条件付き第 1 段の頑健 F 値。結合 Wald は帰無仮説 $H_0: \forall i, \epsilon_i - \epsilon_b = 0$ の検定。個別有意 ϵ_i は $|t| > 1.96$ となる相対非相似拡大性の係数の個数 (全 9 個中)。都道府県 FE 仕様は結合有意 ($\chi^2(9) = 60.38$) だが個別 0/9 であり、多重共線性の典型的兆候を示す。[†] 都道府県 FE 仕様では価格比係数 $\hat{\beta}_p$ の標準誤差が大きく (1.67)、 σ は識別されない (点推定 -0.05 は実質的に無意味であり、過剰統制によるもので弱操作変数ではない)。

4.2.5 都道府県固有選好と所得効果の識別可能性

前節で述べた識別の非対称性は、より一般的な問題の現れである。都道府県固有の選好をコントロールするために固定効果を含めれば、その固定効果が実質消費の変動の大部分を吸収し、各財の総支出弾力性を個別に識別できなくなる。逆に固定効果を排除すれば、都道府県固有の選好をコントロールする経路が失われ、その影響が所得効果に吸収される。この問題は、地域をどの水準で定義しても程度の差を伴って残る。本節ではこの限界を明示し、想定されうる代替仕様がなぜ解決にならないかを述べる。

■固定効果が吸収する変動の大きさ まず問題の大きさを定量化する。推定標本 (47 都道府県 $\times 10$ 年) における $\ln C_{rt}$ の分散のうち、加法的な都道府県 FE は 60.8% を吸収し、39.2% を残す。これに対し地方ブロック FE が吸収するのは 20.1% にとどまり、79.9% が識別に利用可能なまま残る。前節で示したとおり、識別情報を担うのは都道府県間の横断的変動であるから、この差が個別の ϵ_i が識別されるか否かを分ける。本研究が地方ブロック FE を主推定に採用する理由はここにある^{*9}。

■都道府県内の時系列次元に識別情報が存在しないこと より本質的な問題は、識別情報の所在にある。前節で示したとおり、効用交差項を都道府県内成分と都道府県平均成分に分解すると、都道府県内成分に対する操作変数の部分決定係数は 0.001 から 0.009、第 1 段 F 値は 0.34 から 3.69 にとどまる。固定効果を含む推定では、 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ を識別する変

^{*9} 地方ブロックという水準を選ぶことには、変動量の観点に加えて内容面の理由もある。基準財である光熱・水道の都道府県間のシェア差は気候要因に強く規定されており (第 4.2.4 節)、気候帯は都道府県内よりも地方ブロック間で大きく異なる。食習慣についても同様の地理的まとまりが想定される。もっとも、これは水準選択の論拠であって、識別問題そのものの解決ではない。

動が都道府県内の時系列変動だけになる。したがって、その変動に情報が乏しければ、共線性の有無にかかわらず識別は成り立たない。実際、この分解仕様を推定すると、都道府県内成分の係数は標準誤差が点推定の数倍から数十倍に達し、その不安定性が連立を通じて価格比係数にまで波及して、代替の弾力性の推定値が理論的に許容される範囲の外に出る^{*10}。

■相関変量効果（CRE）と変量効果が代替仕様とならないこと この文脈では、Mundlak (1978) 型の相関変量効果（correlated random effects, CRE）や変量効果が代替仕様として想起されうる。しかし、いずれも上記の問題を回避しない。

CRE は固定効果推定と数値的に同一である。Mundlak (1978) が示したとおり、時間可変な説明変数のグループ平均をすべて追加した拡張モデルの推定量は、固定効果推定量と一致する（漸近的な一致ではない）。したがって都道府県平均を追加した CRE 仕様は、表 4 の *pref* 列を別の形で再掲するにすぎない。CRE においても、 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ を識別するのは都道府県内の時系列変動のみであり、都道府県間の横断的変動は都道府県平均の係数に吸収されるからである。

変量効果推定も逃げ道にならない。変量効果の GLS 変換の重みは $1 - \sqrt{\sigma_u^2 / (\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2)}$ であり、 T が大きくなるほど 1 に近づく。すなわち変量効果推定量は固定効果推定量に近づき、同じ吸収の問題を引き継ぐ。重みを小さくすることは都道府県固有效果と実質消費の相関を無視することであり、本節が問題としている交絡をそのまま放置することになる。

■残された限界 以上より、本研究の地方ブロック FE は、識別可能性と交絡の抑制を両立させるための折衷であり、識別問題そのものの解決ではない。都道府県固有の選好と所得効果を分離するには、同一地域内で所得水準の異なる家計を観察できる情報が必要である。すなわち『家計調査』の個票データを用い、地域固定効果を保持したまま地域内の所得分布から総支出弾力性を識別する方向が本来の解決である。この方向は本研究の残された課題であり、第 5.4 節で述べる方法上の限界と併せて位置づけられる。観測可能な地域特性（気候・都市化率等）によって固定効果を置き換える仕様も考えられるが、その場合は選好の地域的異質性が当該特性によって尽くされるという仮定が新たに必要になる。

^{*10} ちょうど識別の 2 段階最小二乗推定量は $\hat{\beta} = (Z'X)^{-1}Z'y$ という形をとるため、一部の操作変数が弱く $Z'X$ が特異に近づく、当該変数だけでなく全成分が不安定になる。実際、この仕様における価格比の第 1 段 F 値は 214.2 と十分に大きいにもかかわらず、代替の弾力性の推定値は解釈可能な範囲を外れる。

4.2.6 構造パラメーターの復元とマクロ整合的規格化

線形回帰で推定された価格比係数 $\beta_p = 1 - \sigma$ から、共通の代替弾力性 $\sigma = 1 - \beta_p$ が一意に定まる。各財ダミーの推定係数 c_i は理論上 $c_i = \sigma \ln(a_i/a_b)$ の構造を持つため、嗜好パラメーター a_i を復元する際は指数変換前に σ で除する ($a_i \propto \exp(c_i/\sigma)$)。

また、データから推定されるのは常に基準財との相対差 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) のみであり、絶対水準を恣意的に固定すると局所的な需要の単調性 (Well-behaved condition) が失われる。これを避けるため、本研究では Comin et al. (2021) に従い、各都道府県・期間の支出シェアで加重平均した社会全体の非相似拡大性パラメーターを 1 とする規格化 (Macro-consistent normalization) を採用する。

$$\sum_{i \in \Theta_t} w_{it} \epsilon_i = \bar{\epsilon} = 1 \quad (52)$$

このとき名目総消費支出 E_t に対する各財の需要の総支出弾力性 η_i は次式で与えられる。

$$\eta_i = \frac{\partial q_{it}/q_{it}}{\partial E_t/E_t} = (\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma - \bar{\epsilon}} + 1 \quad (53)$$

$\bar{\epsilon} = 1$ の制約下では乗数項 $\frac{\sigma-1}{\sigma-\bar{\epsilon}}$ が厳密に 1 となり、総支出弾力性は $\eta_i = \epsilon_i$ という頑健な関係に単純化される。すなわち η_i は乗数経由では σ に依存しない。

主推定 (region, $\hat{\sigma} = 0.427$) から復元した構造パラメーターを表 5 に示す。規格化後の加重平均は構成上 $\bar{\epsilon} = 1.000$ であり、基準財 (光熱・水道) の絶対水準は $\hat{\epsilon}_b = 0.405$ と識別された。総支出弾力性 $\hat{\eta}_i$ の序列は経済的に整合的である。教育 ($\hat{\eta} = 2.51$) が最も強い奢侈財として振る舞い、被服及び履物 (1.83)・教養娯楽 (1.60) がこれに続く。その他の消費支出 (1.05) はおおむね支出中立的 ($\hat{\eta} \simeq 1$) である。一方、保健医療 (0.92)・交通・通信 (0.85)・住居 (0.73)・食料 (0.70)・家具家事用品 (0.57)、および基準財の光熱・水道 (0.41) はいずれも $\hat{\eta} < 1$ の必需財であり、とりわけ光熱・水道・家具・食料が強い必需品特性を示す。非相似拡大性は結合 Wald 検定 ($\chi^2(9) = 80.23, p = 1.5 \times 10^{-13}$) により頑健に支持される。個別の有意性を wild クラスタ・ブートストラップで評価すると、相対非相似拡大性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) は 5 財 (教育・被服及び履物・教養娯楽・その他の消費支出・保健医療) で 0 と有意に異なる (表 6)。さらに、必需財・奢侈財の区別に直結する絶対水準の検定では、教育・被服及び履物・教養娯楽が有意に $\eta > 1$ 、食料・家具家事用品が有意に $\eta < 1$ である。とりわけ食料は $\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.696$ (honest 95% 信頼区間 [0.440, 0.951], $P(\eta < 1) = 0.993$) と有意に必需財であり、エンゲルの法則と整合する。この食料の必需性が、後段 (第 4.5 節) で定量化するエンゲル係数の所得チャネルの基礎を与える。

表5 構造パラメーター推定結果（主推定: 地方ブロック FE, $\hat{\sigma} = 0.427$, $\bar{\epsilon} = 1.000$ ）

分類 (Item)	嗜好 $\hat{a}_i$	相対 $\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b$	絶対 $\hat{\epsilon}_i$	総支出弾力性 $\hat{\eta}_i (= \hat{\epsilon}_i)$
教育	0.011	2.102	2.507	2.507
被服及び履物	0.006	1.424	1.829	1.829
教養娯楽	0.046	1.196	1.602	1.602
その他の消費支出	0.260	0.648	1.053	1.053
保健医療	0.006	0.513	0.918	0.918
交通・通信	0.174	0.441	0.847	0.847
住居	0.019	0.329	0.734	0.734
食料	0.450	0.291	0.696	0.696
家具・家事用品	0.005	0.167	0.572	0.572
光熱・水道（基準財）	0.023	0.000	0.405	0.405

注: 総支出弾力性の降順に並べた。嗜好 a_i は $a_i \propto \exp(c_i/\hat{\sigma})$ を和 1 へ規格化した値。相対非相似拡大性 $\epsilon_i - \epsilon_b$ は基準財（光熱・水道）に対する差。絶対 ϵ_i はマクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ の下で復元した水準。 $\bar{\epsilon} = 1$ のとき $\eta_i = \epsilon_i$ 。

4.2.7 識別の頑健性

効用項側パラメーターの識別頑健性を、 σ への依存性と honest な推論の二点から確認する。

第一に、 $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化の下では絶対水準の総支出弾力性が $\eta_i = \epsilon_i$ となり、乗数 $(\sigma - 1)/(\sigma - \bar{\epsilon}) \equiv 1$ が恒等的に消える。したがって総支出弾力性 η_i は σ に依存せず、その解釈に σ の値を要しない。実際、主推定（region, $\hat{\sigma} = 0.427$ ）と価格項側を含まない仕様（none, $\hat{\sigma} = 0.428$ ）の $\hat{\sigma}$ はほぼ一致し、都道府県 FE 仕様が価格項側の過剰統制によって σ を識別し得ない場合であっても、効用項側の弾力性序列（教育を最強の奢侈財、食料・エネルギーを必需財とする）はこれに左右されない^{*11}。

第二に、honest な推論である。本研究の主推定は単一式の 2SLS であり、クラスター単位の構造残差を符号反転（Rademacher）させて被説明変数を再生成する wild クラスター・ブートストラップ^{*12}を honest な標準誤差・信頼区間の算出に用いる。^{*13} wild ク

^{*11} 価格項を $(1 - \sigma) \ln(p_{irt}/p_{brt})$ のオフセットとして固定し σ を 0.42~0.66 の広い範囲で動かして相対非相似拡大性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) を再推定しても、オフセット経由の微小な伝播を除けば各財の序列は安定し、奢侈財（教育・教養娯楽・被服）と必需財（食料・家具）の対比は全域で保たれる。

^{*12} wild クラスター・ブートストラップは、クラスター数が少数（概ね 5~30）または各クラスターの観測数が不均一な状況で、クラスター頑健標準誤差が過小となり標準的な漸近検定が過大棄却する問題を補正する手法であり、Cameron et al. (2008) が提案した。

^{*13} ペア・クラスター・ブートストラップ（都道府県を復元抽出, $B = 999$ ）は、都道府県の重複により退化

ラスター・ブートストラップによる主推定の相対非相似拡大性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) の honest な推論結果は表 6 に示す通りである。

表 6 相対非相似拡大性の honest 推論 (wild クラスター・ブートストラップ, 主推定 region, $B = 999$)

分類 (Item)	点推定 $\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b$	標準誤差	95% 信頼区間	有意
教育	2.102	0.537	[1.094, 3.161]	✓
被服及び履物	1.424	0.254	[0.962, 1.953]	✓
教養娯楽	1.196	0.215	[0.815, 1.610]	✓
その他の消費支出	0.648	0.295	[0.111, 1.243]	✓
保健医療	0.513	0.250	[0.057, 0.996]	✓
交通・通信	0.441	0.409	[-0.324, 1.229]	—
住居	0.329	0.314	[-0.295, 0.917]	—
食料	0.291	0.163	[-0.016, 0.615]	—
家具・家事用品	0.167	0.215	[-0.239, 0.587]	—

注: 点推定は主推定 (region) の相対非相似拡大性。標準誤差・95% 信頼区間は $X \cdot Z$ ・固定効果を固定した wild クラスター・ブートストラップ ($B = 999$, Rademacher 重み) による。有意列は 95% 信頼区間が 0 を含まないものに ✓ を付す。

加えて、相対非相似拡大性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) を $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化により絶対水準の総支出弾力性 η_i へ変換し、同じ wild クラスター・ブートストラップの各 draw 上で $\hat{\eta}_i$ を再構成した honest 推論を表 7 に示す。必需財・奢侈財の判定 ($\eta \geq 1$) では、教育・被服及び履物・教養娯楽が有意に奢侈財 ($\eta > 1$)、食料・家具家事用品が有意に必需財 ($\eta < 1$) となる。とりわけ本研究の所得チャネルの基礎である食料の必需性は、 $\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.696$ (95% 信頼区間 [0.440, 0.951], $P(\eta < 1) = 0.993$) として頑健に支持される。

4.2.8 関数形の妥当性に関する過剰識別的な診断

第 3.7 節で述べたとおり、NH-CES 型効用関数が消費集合の全体で単調かつ準凹であるための十分条件は $\min_i \epsilon_i > \sigma$ (大域的正則性条件) であり、これは Comin et al. (2021) の記法におけるパラメーター制約 $\varepsilon_i > 0$ に対応する。本研究はこの条件を推定において課していない。したがってこの条件が推定値のもとで成立するか否かは、関数形の妥当性に関する過剰識別的 (overidentifying) な診断となる。

マクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ のもとでは $\eta_i = \epsilon_i$ であるから、この条件は $\min_i \eta_i > \sigma$ と

した再標本が生じ、 σ の裾が解析的 CR2 標準誤差から大きく乖離して過度に保守的になる。したがって本文の honest 推論には wild クラスター・ブートストラップを採用する。

表 7 総支出弾力性 η_i の honest 推論 (wild クラスター・ブートストラップ, 主推定 region, $B = 999$)

分類 (Item)	$\hat{\eta}_i$	95% 信頼区間	$P(\eta_i < 1)$	判定
教育	2.507	[1.454, 3.512]	0.003	奢侈 ✓
被服及び履物	1.829	[1.414, 2.260]	0.000	奢侈 ✓
教養娯楽	1.601	[1.336, 1.876]	0.000	奢侈 ✓
その他の消費支出	1.053	[0.672, 1.455]	0.403	—
保健医療	0.918	[0.569, 1.279]	0.678	—
交通・通信	0.847	[0.211, 1.453]	0.681	—
住居	0.734	[0.197, 1.251]	0.831	—
食料	0.696	[0.440, 0.951]	0.993	必需 ✓
家具・家事用品	0.572	[0.330, 0.809]	1.000	必需 ✓

注: $\eta_i = \epsilon_i$ の点推定・95% 信頼区間は、相対非相似拡大性 ($\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b$) の wild クラスター・ブートストラップ ($B = 999$, Rademacher 重み) の各 draw に $\bar{\epsilon} = 1$ 規格化を施して $\hat{\eta}_i$ を再構成したもの。 $P(\eta_i < 1)$ はブートストラップ分布で $\hat{\eta}_i < 1$ となる割合。判定列は 95% 信頼区間が 1 を含まない場合に ✓ を付し、奢侈財 ($\eta > 1$)・必需財 ($\eta < 1$) の別を示す。基準財 (光熱・水道) は $\hat{\eta}_b = \hat{\epsilon}_b = 0.405$ 。

書ける。推定値における最小値 $\min_i \hat{\eta}_i$ は基準財 (光熱・水道) の $\hat{\eta}_b = \hat{\epsilon}_b = 0.405$ であり、 $\hat{\sigma} = 0.427$ を 0.022 だけ下回る。すなわち大域的正則性条件は、基準財において限界的に満たされない。ただし後述のとおり、この差は標本誤差と区別できる大きさではない^{*14}。

もっとも、この事実が本研究の推定結果を無効にするわけではない。理由は三つある。

第一に、大域的正則性条件は十分条件であって必要条件ではない。第 3.7 節で示したとおり、観測される配分の近傍で単調性が成り立つための条件は $\bar{\epsilon}_t = \sum_i w_{it}\epsilon_i > \sigma$ であり、こちらは規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ と $\hat{\sigma} < 1$ のもとで構成上必ず満たされる。標本内の各都道府県・年について $\bar{\epsilon}_{rt}$ を計算すると中央値 0.995、範囲 [0.903, 1.110] であり、最も小さい観測でも $\hat{\sigma} = 0.427$ を 0.475 上回る。すなわち標本内のすべての観測において、単調性は大きな余裕をもって成立している。

第二に、条件が破れうる領域はデータから極端に遠い。実質消費 C_t が低下すると支出

^{*14} wild クラスター・ブートストラップ ($B = 999$, 全 draw が有効) の各 draw について 10 財の $\hat{\eta}_i$ と $\hat{\sigma}$ を再構成すると、 $\min_i \hat{\eta}_i$ の中央値は 0.341 (95% 信頼区間 [0.077, 0.554])、 $\hat{\sigma}$ の中央値は 0.425 (同 [0.311, 0.537]) である。両者の差 $\min_i \hat{\eta}_i - \hat{\sigma}$ の中央値は -0.087 、95% 信頼区間は $[-0.376, 0.178]$ で 0 を含み、 $P(\min_i \hat{\eta}_i > \hat{\sigma}) = 0.275$ である。すなわち大域的正則性条件の不成立は標本誤差と区別できない。なお最小値統計量 $\min_i \hat{\eta}_i$ は推定値ベクトルの凹関数であるから、Jensen の不等式により各 draw の推定誤差のもとで点推定 0.405 を下回る方向に偏る (ブートストラップ中央値は 0.341)。この意味で $P = 0.275$ は保守的な下限である。

は ϵ_i の小さい財へ集中し、 $\bar{\epsilon}(C_t)$ は $\min_i \hat{\epsilon}_i = 0.405$ へ向かって単調に低下する。2024 年の価格と支出シェアで嗜好パラメーターを較正したうえで $\bar{\epsilon}(C) = \hat{\sigma}$ となる水準を数値的に求めると、 C は 2024 年の実績水準の 2.8×10^{-7} 倍である。単調性が実際に破れるのは実質消費が現在の約 360 万分の 1 に低下した場合であり、経済的に意味のある範囲の外にある。

第三に、そもそもこの差は統計的に有意ではない。上述のとおり $\min_i \hat{\eta}_i - \hat{\sigma}$ の 95% 信頼区間は $[-0.376, 0.178]$ であり 0 を含む。 $\min_i \hat{\eta}_i$ の信頼区間 $[0.077, 0.554]$ と $\hat{\sigma}$ の信頼区間 $[0.311, 0.537]$ はほぼ完全に重なっており、本研究のデータは両者の大小を識別する力をもたない。

以上を総合すると、大域的正則性条件の限界的な不成立は、関数形の完全な適合を否定する穏当な警告として受け止めるべきものであり、標本内の推定結果の解釈を変えるものではない。ただし、本研究の推定値を標本から大きく離れた消費水準へ外挿することは正当化されない。この点は、第 4.4 節で 1970 年まで遡る反実仮想を行う際にも留意した^{*15}。

なお、この不成立が基準財において生じていることには理由がある。基準財の ϵ_b は直接推定されるパラメーターではなく、規格化 $\epsilon_b = 1 - \sum_i w_i(\epsilon_i - \epsilon_b)$ を通じて他の 9 財の推定値と標本平均シェアから導出される量である。すなわち $\hat{\epsilon}_b$ は全推定値の誤差を集約しており、10 財のなかで最も精度の低い推定値である。 $\hat{\epsilon}_b - \hat{\sigma} = -0.022$ という差は、この推定精度に照らせば無視しうる大きさである。

4.3 エンゲル係数変動の要因分解

構造推定で得たパラメーターに基づき、分析期間の初年である 2015 年を基準年 (Base year) とした反実仮想 (Counterfactual) シミュレーションを行い、近年のエンゲル係数上昇の要因を「価格効果 (Price Effect)」「所得効果 (Income Effect、非相似拡大性)」「人口属性効果 (Demographic Effect)」の 3 チャンネルに分解する。各チャンネルは当該変数のみを実績どおり変動させ、残りを基準年に固定して算出するため、三者は加法的に分離される。47 都道府県平均の食料支出シェアの推移を図 3 に、その期間内変化の分解を表 8 に示す。

ここで用語を確認しておく。需要分析では通常、Slutsky 分解に従って非補償の価格効果を代替効果と所得効果に分けるが、本研究の 3 チャンネル分解はそれとは異なる切り分けである。本研究の「価格効果」は、実質消費 C_t を基準年に固定したうえで相対価格のみを

^{*15} 第 4.4 節の外挿においても、1970 年の支出シェアで評価した $\bar{\epsilon}$ は 1.017 であり、単調性条件は大きな余裕をもって満たされている。

動かす反実仮想であり、第 3.6.3 節で示したとおり補償（Hicks）反応、すなわち Slutsky 分解の代替効果に一致する。本研究の「所得効果」は、相対価格を固定して C_t のみを動かす反実仮想であり、Slutsky 分解の所得効果と同一の経路をたどる。したがって両者は非補償価格効果を重複して計上するものではなく、互いに排他的な 2 チャンネルである。ただし本研究は C_t に実績値を用いるため、「所得効果」チャンネルには、価格上昇による実質購買力の目減りに由来する部分と、名目総消費支出そのものの変動に由来する部分の双方が含まれる。この点は本節の末尾で定量的に整理する。

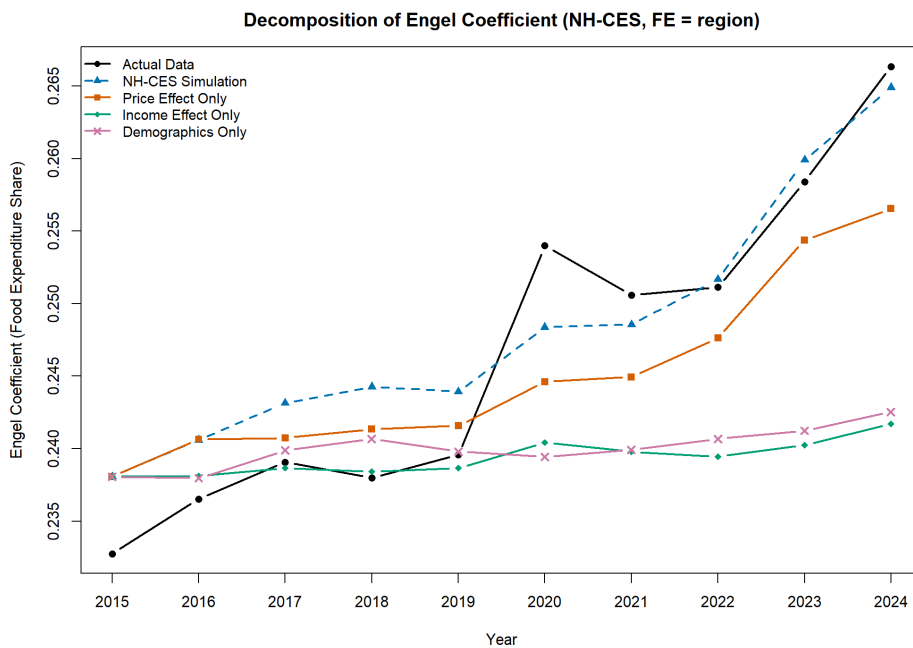


図 3 近年のエンゲル係数上昇の要因分解（Implicit NH-CES モデル, 主推定 region による反実仮想）

まず、モデルの当てはまりを確認する。実際のデータ（Actual Data）と NH-CES モデルの予測（NH-CES Simulation）は全期間にわたり近接して推移し、本需要システムが現実のエンゲル係数のマクロな上昇トレンドを良好に再現している（図 3）。食料シェアの実績は 2015 年の 23.27% から 2024 年の 26.64% へ +3.361 % ポイント上昇した。3 変数すべてを実績変動させた NH-CES モデルはこのうち +2.684 % ポイント（約 80%）を再現し、残差 +0.677 % ポイントは 2020 年に顕著な COVID 期の一時的変動などモデルが捉えない成分である。

次に要因分解の結果を解釈する。第一に価格効果である。実質消費と人口属性を 2015 年に固定し相対価格のみを変動させた反実仮想（Price Effect Only）では、食料シェ

アが明確な上昇トレンドを描き、期間内に +1.848 % ポイント上昇する。これはモデル総効果の 68.8% (実績変化の 55%) を占め、三チャンネルのなかで支配的である。これは前節で推定された代替弾力性 $\hat{\sigma} = 0.427 < 1$ (粗補完) と整合する。すなわち、原材料インフレや円安を背景とした食料品の相対価格高騰に直面した際、家計は食料の実質消費量を価格上昇に見合うほど削減できず、この代替の困難さを通じて名目的な食料支出シェア (エンゲル係数) が押し上げられた。

第二に所得効果 (非相似拡大チャンネル) である。相対価格と人口属性を 2015 年に固定し実質総消費 C_t のみを変動させた反実仮想 (Income Effect Only) では、食料シェアは同方向 (上昇) に動くが、その期間内変化は +0.363 % ポイントにとどまる。前節で食料が有意な必需財 ($\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.70 < 1$, $P(\eta < 1) = 0.993$) と識別された通り、実質購買力の停滞は食料シェアを押し上げる方向に作用する。ただしその寄与はモデル総効果の 13.5% (実績変化の 11%) にとどまり、価格効果には遠く及ばない。図 3 でも所得効果のみの系列 (Income Effect Only) はほぼ横ばいで推移している。

第三に人口属性効果である。価格と所得を 2015 年に固定し世帯人員・世帯主年齢・持家率のみを変動させた反実仮想 (Demographics Only) では、食料シェアは +0.446 % ポイント上昇し、モデル総効果の 16.6% を占める。世帯構成の変化 (世帯人員・世帯主年齢・持家率の推移) も食料シェア上昇に寄与しており、その規模は所得効果と同程度である。なお交互作用項は +0.027 % ポイント (1.0%) と無視できるほど小さく、三チャンネルがほぼ加法的に分離できることを示す。表 8 が示す通り、価格効果が他の二チャンネルを大きく上回るという順序は、所得効果が σ に不変・価格効果が $(1 - \sigma)$ に比例することから、 σ の信頼区間全域で保たれる。

最後に、以上の分解を Slutsky 分解の標準形に組み替えておく。実質消費インデックスの定義 $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ より

$$\Delta \ln C_{rt} = \Delta \ln E_{rt} - \Delta \ln P_{rt}^T \quad (54)$$

であり、右辺第 2 項が価格上昇による実質購買力の目減りを表す。Törnqvist 価格指数の対数変化は $\Delta \ln P_{rt}^T = \sum_i \frac{1}{2} (w_{irt} + w_{ir,t-1}) \Delta \ln p_{irt}$ という支出シェア加重和であり、これは (29) が与える Slutsky 所得項 $-\sum_k w_{kt} d \ln p_{kt}$ の離散近似にほかならない。したがって (54) の第 2 項が Slutsky 分解の所得効果に、第 1 項が名目総消費支出の変動による支出効果に対応する。

47 都道府県平均でみると、2015 年から 2024 年にかけて $\Delta \ln E_{rt} = +0.042$ 、 $\Delta \ln P_{rt}^T = +0.091$ 、 $\Delta \ln C_{rt} = -0.049$ である。すなわち名目総消費支出は 4.3% 増加したが、物価が 9.6% 上昇したため実質消費は 4.8% 低下した。所得効果チャンネル (+0.363 % ポイ

表 8 食料エンゲル係数の期間内変化の要因分解 (2015 年 → 2024 年, 主推定 region, $\hat{\sigma} = 0.427$)

チャンネル	変化 Δ (% ポイント)	モデル総効果比
価格効果 (Price)	+1.848	68.8%
所得効果 (Income)	+0.363	13.5%
人口属性効果 (Demographics)	+0.446	16.6%
交互作用 (Interaction)	+0.027	1.0%
モデル総効果 (NH-CES)	+2.684	100.0%
実績変化 (Actual, 参照)	+3.361	—
適合残差 (Actual – model)	+0.677	—

注: 2015 年基準の反実仮想による食料支出シェアの 2015→2024 年変化 (47 都道府県平均, % ポイント)。各チャンネルは当該変数のみ実績変動・他を基準年固定 (世帯属性も固定) で算出。価格=相対価格、所得=実質総消費 C_t 、人口属性=世帯人員・世帯主年齢・持家率。交互作用=モデル総効果 – (価格 + 所得 + 人口属性) でシェア空間の非加法性を表す。モデル総効果は 3 変数すべてを実績変動させた予測変化、適合残差は実績変化との差で 2020 年の COVID 期等の一時変動を含む。所得効果チャンネルは σ に不変、価格効果チャンネルは $(1 - \sigma)$ に比例し、価格 > 所得の順序は σ の信頼区間全域で保たれる。

ント) はこの $\Delta \ln C_{rt}$ によって駆動されているから、(54) の比に応じて配分すれば、価格上昇に由来する部分が +0.672 % ポイント、名目総消費支出の増加に由来する部分が -0.309 % ポイントとなる^{*16}。

これを踏まえて (34) の標準形に組み替えたものが表 9 である。食料の相対価格上昇がエンゲル係数に与えた効果は、代替効果 +1.848 % ポイントと所得効果 +0.672 % ポイントの合計 +2.519 % ポイントであり、モデル総効果の 93.9% を占める。食料が必需財 ($\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.696 < 1$) であるため、(34) の 2 項は同方向に働く。本文の「価格効果 68.8%」は補償された代替効果のみを指す数値であり、価格上昇の総合的な寄与はこれを上回ることに注意を要する。

デフレーターを選択に対する感応度

第 4.3 節の分解において、実質消費の変化 $\Delta \ln C_{rt}$ は第 4.1 節で構築した Törnqvist 価格指数によるデフレートから得られており、需要システムの構造推計の産物ではない (第 1 節)。そこで、価格指数の算式を変えて $\Delta \ln C_{rt}$ を再構成し、この外生的な入力分解の結論をどこまで左右しうるかを調べる。

^{*16} この配分は、所得効果チャンネルが $\Delta \ln C_{rt}$ について線形であることを用いた一次近似である。実際、(34) による一次近似 $w_{\text{食料}} (\hat{\eta}_{\text{食料}} - 1) \Delta \ln C_{rt} = 0.233 \times (0.696 - 1) \times (-0.0494) = +0.349$ % ポイントは、反実仮想シミュレーションによる +0.363 % ポイントとほぼ一致しており、当該変化幅において線形性はよく成り立っている。

表9 表8の Slutsky 分解の標準形への組み替え (2015 年 →2024 年, 主推定 region)

チャンネル	変化 Δ (% ポイント)	モデル総効果比
非補償価格効果	+2.519	93.9%
うち代替効果 (補償反応)	+1.848	68.8%
うち所得効果 (実質購買力の目減り)	+0.672	25.0%
名目総消費支出効果	-0.309	-11.5%
人口属性効果 (Demographics)	+0.446	16.6%
交互作用 (Interaction)	+0.027	1.0%
モデル総効果 (NH-CES)	+2.684	100.0%

注: 表8を(34)の Slutsky 分解の標準形に組み替えたもの。表8の「価格効果」が代替効果に、「所得効果」が所得効果と名目総消費支出効果の和に対応する。所得効果と名目総消費支出効果への配分は $\Delta \ln C_{rt} = \Delta \ln E_{rt} - \Delta \ln P_{rt}^T$ の比による (本文脚注参照)。名目総消費支出効果が負であるのは、食料が必需財であるため名目総消費支出の増加が食料シェアを押し下げるからである。

表10に、Laspeyres、Paasche、Fisher、Sato–Vartia、および Törnqvist の5算式による結果を示す。基準期のウェイトを固定する Laspeyres 指数は代替行動を織り込まないため生計費の上昇を過大に評価し、当期のウェイトを用いる Paasche 指数は逆に過小に評価する。Fisher・Törnqvist・Sato–Vartia を含む superlative 指数はこの両者の間に位置し、本データでもこの序列が成立している。したがって、上方バイアスをもつ Laspeyres と下方バイアスをもつ Paasche の双方でデフレートしても分解の結論が変わらなければ、算式の選択に対する頑健性としては十分である。

$\Delta \ln C_{rt}$ は -5.03% (Laspeyres) から -4.73% (Paasche) の範囲にあり、本研究の値からの乖離は最大でも 2% である。所得効果チャンネルはこれに応じて $+0.370$ から $+0.356$ %ポイントの範囲で動くにとどまる。この幅 0.014 %ポイント、価格効果 $+1.848$ %ポイントと所得効果 $+0.363$ %ポイントの差 1.485 %ポイントに比べて2桁小さい。すなわち、上方バイアスをもつ算式でも下方バイアスをもつ算式でも、価格効果が所得効果を上回るという分解の結論は定性的に崩れない。

4.4 長期的な視点：エンゲル係数上昇はなぜ近年まで問題にならなかったのか

前節までの分析は2015–2024年を対象としている。本節では、同じ構造パラメーターを用いた反実仮想を1970年まで遡って適用し、近年の動きが歴史的にどのような位置にあるかを確認する。

用いるのは総務省『家計調査』(全国・二人以上の世帯のうち勤労者世帯)および『消費

表 10 価格指数の算式に対する感応度 (2015 年 → 2024 年, 47 都道府県平均)

価格指数	$\Delta \ln P_{rt}$	$\Delta \ln C_{rt}$	実質変化	所得効果 (% ポイント)
Laspeyres	+0.0923	-0.0503	-4.91%	+0.370
Sato-Vartia	+0.0914	-0.0495	-4.83%	+0.364
Törnqvist (本研究)	+0.0913	-0.0494	-4.82%	+0.363
Fisher	+0.0913	-0.0494	-4.82%	+0.363
Paasche	+0.0904	-0.0484	-4.73%	+0.356

注: いずれも都道府県別に連鎖方式で構成し、47 都道府県で平均した。名目総消費支出の変化は算式によらず $\Delta \ln E_{rt} = +0.0420$ (+4.3%) であり、 $\Delta \ln C_{rt} = \Delta \ln E_{rt} - \Delta \ln P_{rt}$ である。所得効果の列は、Törnqvist 指数による反実仮想の値 +0.363 % ポイント (表 8) を $\Delta \ln C_{rt}$ の比に応じて再計算したもの。価格効果は $\Delta \ln C_{rt}$ に依存せず +1.848 % ポイントで一定である。

者物価指数』(全国、2020 年基準) の 1970–2025 年の年次系列である。10 大費目の支出額と価格指数から Törnqvist 価格指数を構成し、 $C_t = E_t/P_t^T$ として実質消費インデックスを得る。嗜好パラメーターは 1970 年の支出シェアに一致するよう較正し、 σ と ϵ_i は表 5 の推定値をそのまま用いる^{*17,*18}。

図 4(a) は、食料支出シェアの実績と、価格のみ・実質消費のみを実績どおり変動させた反実仮想を示す。エンゲル係数は 1970 年の 32.2% から 2005 年の 21.5% まで一貫して低下し、その後反転して 2024 年に 27.1% に達している。

期間別の寄与を表 11 に示す。査読の過程で提起された「近年までエンゲル係数の上昇が問題にならなかったのはなぜか」という問いに対して、本節の分析は次の三段階の答えを与える。

第一に、1970 年から 1990 年にかけては実質消費が +33.7% 増加し、所得チャネルが食料シェアを -3.68 % ポイント押し下げている。食料の相対価格はほぼ横ばいで価格チャネルは中立であり (-0.14 % ポイント)、エンゲル係数が低下するのは当然の帰結であった。

^{*17} この外挿は選好パラメーターが期間を通じて安定的であるという仮定に依拠しており、図 4 はあくまで「現在の需要構造を過去に当てはめたらどう見えるか」を示す反実仮想である。なお、規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ は 2015–2024 年の標本平均の支出シェアで課したものであるが、1970 年の支出シェアで評価しても $\bar{\epsilon} = 1.017$ (2024 年では 0.999) であり、外挿によって規格化が大きく崩れることはない。

^{*18} 『家計調査』は 2018 年 1 月に家計簿 (調査票) が改正され、収入を世帯員ごとに記載する様式が追加された。総務省が公表する変動調整値によれば、この改正は勤労者世帯の実収入を年平均で約 3.5% 押し上げ、消費支出への影響は約 +0.3% にとどまる (総務省統計局, 2019)。したがって後述する平均消費性向の低下のうち 2 % ポイント強は測定方法の変更によるものと考えられる。もっともこれを調整しても 2015–2024 年の実質可処分所得の増加 (+10.8%) は +7.4% 程度にとどまるにすぎず、本節の結論は変わらない。また調査対象は 2000 年から農林漁家世帯を含むように変更されている。

第二に、1990 年から 2005 年にかけては実質消費が -7.1% と減少に転じ、所得チャンネルは既に正に転じている ($+0.80\%$ ポイント)。すなわちこの時期にも上昇圧力は存在した。しかしその大きさは、世帯人員の縮小などを反映する残差 (-3.18% ポイント) に埋もれる程度にとどまっていた。

第三に、2005 年以降は両チャンネルが同時に、かつ大きく正に転じた (価格 $+2.64$ 、所得 $+1.71\%$ ポイント)。歴史的に異例なのはとりわけ価格チャンネルである。図 4(b) が示すとおり、食料の相対価格は 1970 年から 2000 年まで年率 -0.11% でほぼ横ばいに推移したのち、2000 年を底として 2025 年までに $+25.2\%$ (年率 $+0.90\%$) 上昇した。30 年続いた食料相対価格の安定が、この四半世紀で明確に破れたことが、近年のエンゲル係数上昇の背景にある。

なお、モデルの説明力は局面によって大きく異なる。上昇局面 (2005–2024 年) では実績 $+5.52\%$ ポイントのうち $+4.49$ (81%) を 2 チャンネルで説明できるのに対し、低下局面 (1970–2005 年) では実績 -10.69 のうち -3.52 (33%) にとどまる。低下局面の残差 -7.17% ポイントは、本研究の 2 チャンネルで捉えられない要因の総体である。この期間には世帯人員が 3.90 人から 3.46 人へ縮小し、世帯主年齢が 41.1 歳から 46.9 歳へ上昇するなど、世帯属性が大きく変化した。食の外部化に代表される嗜好や品目構成の変化も進行しており、さらに残差にはモデルの特定化誤差も含まれる。本研究はこれらを分離する枠組みをもたないため、残差の内訳を特定することはできない。この非対称性は本節の分析の限界であると同時に、近年の局面が過去の長期的低下とは異なる経路で生じていることを示唆する。

実質消費の減少は実質所得の減少によるものではない

査読の過程では「実質所得の落ち込み」という観点からの問いも提起された。この点について、本節のデータは注意を要する事実を示している。

実質消費インデックスの変化は、定義上、実質可処分所得の変化と平均消費性向の変化に分解できる。

$$\Delta \ln C_t = \underbrace{(\Delta \ln Y_t^d - \Delta \ln P_t^T)}_{\text{実質可処分所得}} + \underbrace{\Delta \ln (E_t / Y_t^d)}_{\text{平均消費性向}} \quad (55)$$

ここで Y_t^d は可処分所得である。この分解を表 11 の右側に示した。

2000 年代 (2000–2010 年) の実質消費の減少 (-5.5%) は、実質可処分所得の減少 (-8.2%) によるものであった。これに対し 2015–2024 年はまったく様相が異なる。実質可処分所得は $+10.8\%$ 増加している一方、平均消費性向が 73.8% から 62.2% へ低下し (対数で -17.1%)、その結果として実質消費が -6.3% 減少した (図 4(c)(d))。すなわち

近年のエンゲル係数上昇における所得チャネルは、実質所得の低下ではなく貯蓄率の上昇によって駆動されている。

平均消費性向の低下は COVID-19 以前の 2015–2019 年に既に 5.9 % ポイント進行しており、一時的な現象ではない。その要因としては高齢化の影響の反転、賃金上昇が残業代・賞与という一時的所得に偏ったこと、年金・税制への不安による予備的動機などが指摘されている（齋藤, 2022）。国民経済計算ベースの家計貯蓄率も 2010 年代半ば以降に上昇しており、『家計調査』固有の測定問題ではない。

本研究のモデルは総消費支出 E_t を所与とした期内の配分問題を扱っており、 E_t の決定は分析の対象外である。これは便宜的な切り分けではなく、Comin et al. (2021) の Lemma 2 が示すとおり、explicitly additive な選好のもとで家計の問題が異時点間配分と期内配分に分解されること（two-stage budgeting）の帰結である。したがって貯蓄率の上昇は本研究の要因分解の上流にあり、分解の妥当性を損なうものではない。ただし解釈においては、本研究の C_t が期内の効用水準であって生涯厚生ではないことに留意する必要がある。貯蓄率の上昇が予備的動機によるものであれば不確実性の増大という厚生損失を伴うが、一時的所得の平準化によるものであれば厚生中立に近い。本研究の枠組みはこの区別を識別しない。

表 11 食料支出シェアの期間別要因分解（全国・二人以上の勤労者世帯）

期間	食料シェアの変化（% ポイント）					実質消費の変化（%）		
	実績	価格	所得	モデル計	残差	計	可処分所得	消費性向
1970–1980	−4.40	+0.02	−2.16	−2.21	−2.18	+20.2	+22.4	−2.2
1980–1990	−3.70	−0.16	−1.52	−1.90	−1.80	+13.5	+17.0	−3.5
1990–2000	−2.14	−0.27	+0.56	+0.27	−2.40	−4.9	−0.6	−4.3
2000–2005	−0.46	+0.06	+0.24	+0.33	−0.78	−2.2	−5.7	+3.6
2005–2015	+2.04	+0.69	+1.03	+1.83	+0.21	−9.3	−8.1	−1.2
2015–2024	+3.48	+1.95	+0.68	+2.66	+0.82	−6.3	+10.8	−17.1
低下局面 1970–2005	−10.69	−0.35	−2.88	−3.52	−7.17	+26.6	+33.1	−6.5
上昇局面 2005–2024	+5.52	+2.64	+1.71	+4.49	+1.03	−15.5	+2.7	−18.3

注：左半分は図 4(a) の反実仮想による食料支出シェアの変化。残差＝実績 − モデル計であり、世帯人員の変化や嗜好変化を含む。右半分は (55) による実質消費の変化の分解（対数差、%）。可処分所得列は実質可処分所得の変化、消費性向列は平均消費性向の対数変化。2018 年の家計簿改正の影響については本文脚注を参照。

以上から本研究の発見は次の 2 点に整理される。第一に、日本の家計の需要システムは明確に非相似拡大的（Non-homothetic）であり、所得効果を一律に 1 へ制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。教育を最強の奢侈財、食料・エネルギーを必需財とする総支出弾力性の序列（表 5・7）は、結合 Wald 検定および wild クラスター・ブートス

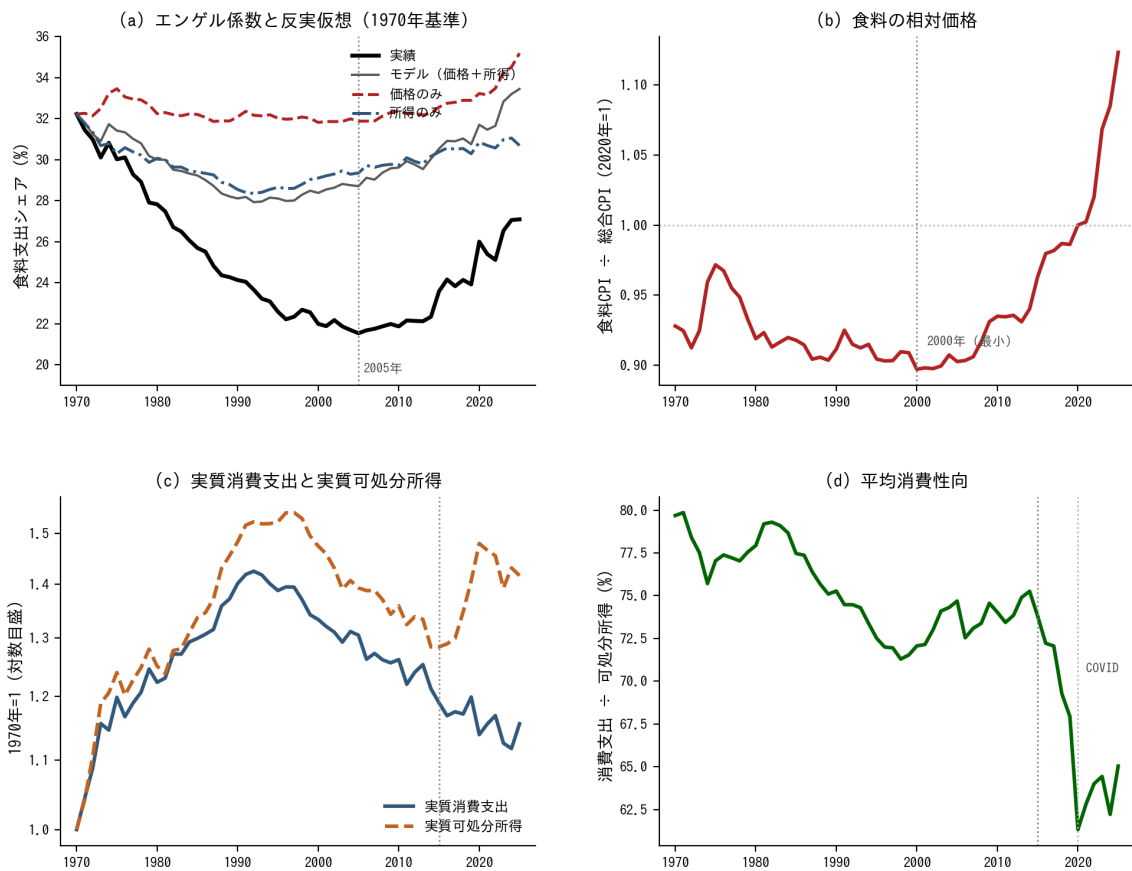


図4 エンゲル係数の長期的推移と要因分解（全国・二人以上の勤労者世帯，1970–2025年）

注：(a) 食料支出シェアの実績と、1970年を基準年とする反実仮想。「価格のみ」は実質消費を1970年に固定して相対価格のみを、「所得のみ」は相対価格を1970年に固定して実質消費のみを実績どおり変動させた場合。構造パラメーターは表5の推定値、嗜好パラメーターは1970年の支出シェアに較正。(b) 食料CPIを総合CPIで除した相対価格。(c) 名目値をTörnqvist価格指数でデフレートした実質値（1970年＝1、対数目盛）。(d) 消費支出を可処分所得で除した平均消費性向。出所は総務省『家計調査』および『消費者物価指数』。

トラップを通じて頑健に識別された。第二に、2015–2024年のエンゲル係数上昇トレンドの主因は食料品の相対価格高騰（価格効果，モデル総効果の69%）であり、非相似拡大的な所得効果の寄与は穏当（同13.5%）で、人口属性効果（同16.6%）と同程度であった。

この2点は矛盾しない。非相似拡大性は需要システムの横断面・水準における構造的特性であるのに対し、要因分解は特定期間の時系列変動を価格・所得・人口属性の各チャネルへ配分する分析であり、両者が着目する側面が異なるからである。本分析期間において、相対価格の変動は実質消費や世帯構成の変動よりもエンゲル係数を強く駆動した。所得効果を構造的に表現できないホモセティックCESは、需要システムの非相似拡大的な構造そのもの（横断面の総支出弾力性の異質性）を捉えられない点で誤設定であり、本研

究の NH-CES アプローチは、この構造を識別したうえで時系列のエンゲル係数変動が価格主導であったことを定量的に示した点に意義がある。

4.5 嗜好パラメーターの比較と生活費計測への含意

前節までに、(1) 支出シェアの非相似拡大性が頑健に識別され同次的な CES（ホモセティック）が棄却されること（表 5、4.2.4 節）、(2) 2015–2024 年のエンゲル係数の上昇が価格主導であり所得・非相似拡大チャネルの寄与は穏当であること（表 8）を示した。本節では、これら二つの発見が厚生計測に対してもつ含意を、標準的 CES と Non-homothetic CES（以下、NH-CES）の対比という観点から整理する。具体的には、両モデルから復元される嗜好パラメーター a_i 、それらが含意する生計費（単位費用）指数、および効用（実質消費）水準を比較し、需要システムの定式化の違いが生活費・厚生計測をどの程度変えるかを定量化する。

4.5.1 嗜好パラメーターの比較

標準的 CES と NH-CES はいずれも、推定された財別切片 $\hat{c}_i$ と代替の弾力性 $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ から、嗜好パラメーターを

$$\hat{a}_i \propto \exp(\hat{c}_i / \hat{\sigma}), \quad \sum_{i \in \Theta} \hat{a}_i = 1 \quad (56)$$

として復元する。両モデルで $\hat{a}_i$ が乖離する理由は二つある。第一に、推定される代替の弾力性が異なる（CES で $\hat{\sigma}_{\text{CES}} = 0.366$ 、NH-CES で $\hat{\sigma}_{\text{NHCES}} = 0.427$ ）。第二に、標準的 CES は所得効果（非相似拡大性）を許容しないため、横断面における支出パターンの体系的較差を全て嗜好パラメーターに吸収させる一方、NH-CES は同じ較差の一部を生活水準への依存（ $C_t^{\epsilon_i}$ 項）に帰属させる。表 12 に両者の復元結果を対比する。

標準的 CES は、最大シェアをもつ食料への嗜好ウェイトを NH-CES より大きく評価する（0.497 対 0.450）。これは、CES が横断面の支出パターンをすべて嗜好に帰属させるため、本来は食料の必需性（ $\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.70 < 1$ 、すなわち生活水準が上がるほど食料シェアが低下する性質）に由来する成分まで嗜好パラメーターに吸収するためである。NH-CES はこの成分を $C_t^{\epsilon_i}$ 項に分離するため、食料の嗜好ウェイトはより小さく復元され、その分が他の財にわずかに再配分される。もっとも両モデルの嗜好パラメーターの差は食料に集中し（ $|\Delta a_i|$ は食料で最大の 0.047、他財はいずれも 0.011 以下）、全体としては近い。それでも両モデルは「平均的な消費バスケットがなぜそのように観察されるか」の帰属（嗜好か生活水準か）において質的に異なる解釈を与える。

表 12 嗜好パラメーター a_i の比較（主推定：地方ブロック固定効果, $\hat{\sigma}_{\text{CES}} = 0.366$, $\hat{\sigma}_{\text{NHCES}} = 0.427$ ）

分類 (Item)	a_i^{CES}	a_i^{NHCES}	差 Δa_i	ϵ_i
食料	0.497	0.450	-0.047	0.696
その他の消費支出	0.262	0.260	-0.002	1.053
交通・通信	0.165	0.174	+0.009	0.847
教養娯楽	0.034	0.046	+0.011	1.601
光熱・水道	0.013	0.023	+0.009	0.405
住居	0.013	0.019	+0.006	0.734
教育	0.007	0.011	+0.005	2.507
保健医療	0.003	0.006	+0.003	0.918
被服及び履物	0.003	0.006	+0.003	1.829
家具・家事用品	0.003	0.005	+0.003	0.572

注：復元式は (56)。 $\hat{\sigma}$ は各モデルの相対価格比係数から $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\beta}_p$ として算出され、両モデルで異なる。 $\Delta a_i = a_i^{\text{NHCES}} - a_i^{\text{CES}}$ 。 ϵ_i は NH-CES の絶対非相似拡大性 ($\bar{\epsilon} = 1$ に規格化) であり、NH-CES 列・ ϵ_i 列は表 5 と整合する。

4.5.2 生計費（単位費用）指数への含意

両モデルの含意する生計費は、効用 1 単位を達成するための最小費用、すなわち単位費用関数で与えられる。一定の効用水準を基準として価格変化のみを評価するこの生計費比は、Konüs (1939) の真の生計費指数 (true cost-of-living index) の概念に対応する。標準的 CES では価格指数 (7) がそのまま生計費であり、効用水準に依存しない。NH-CES では支出関数 (23) を効用 C_t で除して

$$P_t^{\text{NHCES}} = \frac{E_N(p_t, C_t)}{C_t} = \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} \tilde{C}_t^{\epsilon_i-1} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (57)$$

を得る（第二等号は (23) の整理による）。なお式 (57) は一般の価格ベクトル p_t について記しているが、実証では各都道府県の価格ベクトル $(p_{irt})_{i \in \Theta_t}$ で評価し、都道府県間で平均して全国生計費指数を構成する。 $\epsilon_i \equiv 1$ ならば $\tilde{C}_t$ 項が消え (7) に一致する点が、非相似拡大性が生計費に及ぼす効果を集約している。ここで $\tilde{C}_t \equiv C_t / \bar{C}$ 、 $\bar{C} = \exp(\overline{\ln C})$ は推定時の中心化点である。これは本質的な規格化であり、推定式が中心化した $\ln C$ を説明変数としているため、復元された $\hat{a}_i$ は $\tilde{C}_t = 1$ （標本幾何平均）における選好に対応する。生の C_t で (57) を評価すると、 $\tilde{C}_t^{\epsilon_i-1}$ 項が最大の非相似拡大性パラメーターをもつ財に発散的な重みを与え、含意シェアが実データと乖離して指数が退化することを確認し

た。なお NH-CES の生計費は効用水準に依存するため、各都道府県の 2015 年の生活水準 $\tilde{C}_{r,2015}$ に固定し価格のみを変動させた固定効用（基準効用型）コスト・オブ・リビングとして評価する*¹⁹。

表 13 および図 5 に、2015 年を 100 とする全国生計費指数を、総務省『消費者物価指数』（全国・総合）と対比して示す。2015–2024 年の累積上昇率は公式 CPI で +10.49%、標準的 CES で +9.32%、NH-CES で +9.53% である。両モデルの生計費は平穏な年には近接するが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には差（NH-CES–CES）が全国平均で +0.89 ポイントに開き、その後縮小して 2024 年には +0.21 ポイントとなる。NH-CES の生計費は、各年の実支出シェアから直接構成した Törnqvist 価格指数（モデル非依存の superlative 基準）にほぼ一致する（差は全期間で 0.06 ポイント以内）一方、CES はこれを下回り、その乖離は 2022 年に約 0.95 ポイントで最大となる。すなわちホモセティック CES は、必需財価格が高騰した局面の生計費上昇を Törnqvist 価格指数に対して過小評価する*²⁰。

注目すべきは二種類の差の関係である。第一に、推計生計費指数（CES・NH-CES）はいずれも公式 CPI を下回って推移し、2024 年でその乖離は約 1.0~1.2 ポイントに達する。第二に、ホモセティック対非相似拡大という需要構造の選択が生計費に与える差（NH-CES–CES）は、平穏な年には 0.1 ポイント未満と小さいが、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には +0.89 ポイントへ拡大する。この 2022 年の構造差は、同年の推計指数 – 公式 CPI 乖離（NH-CES で –0.90、CES で –1.79 ポイント）と同程度であり、需要システムの定式化の選択は、少なくとも必需財インフレの局面では、計測側の選択（算式・品目バスケット・標本範囲）に匹敵する大きさで生計費計測に影響しうる*²¹。

*¹⁹ 実際の $\tilde{C}_t$ 経路で評価する Paasche 型では、実質消費の低下が必需財（ $\epsilon_i < 1$ ）を $\tilde{C}_t^{\epsilon_i-1}$ 項を通じて相対的に上方加重するため、全国指数は固定効用型よりやや高く出る。差は実質消費が低下する後年ほど拡大し、2024 年で最大 +0.10 ポイントである。これは基準効用の選択という指数算式上の差であり、本節の CES 対 NH-CES 比較（両系列とも固定効用で構成）には影響しない。

*²⁰ この過小評価は推定パラメーターの選択に依存しない。観測支出シェアと価格のみから構成され構造パラメーター（ a_i, σ ）を一切用いない Sato-Vartia 指数は、ホモセティック CES 選好の下では真の CES 生計費比に厳密に一致する（Sato, 1976; Vartia, 1976）（CES 厳密価格指数の実証的活用は Feenstra, 1994）。本データで計算すると、Sato-Vartia 指数は Törnqvist 価格指数と全期間で 0.04 ポイント以内で一致し、構造 CES の COLI はそのいずれをも下回る（2024 年で約 0.23、2022 年で約 0.96 ポイント）。仮にホモセティック CES が正しければ Sato-Vartia 指数は構造 CES の COLI に一致するはずであり、両者の乖離はそれ自体が非相似拡大のモデル非依存な証左である。したがって CES によるインフレ局面の生計費過小評価は、推定値ではなくホモセティックという関数形の制約に起因する。

*²¹ 推計生計費指数と公式 CPI の乖離には、連鎖型 superlative 指数と公式 CPI の基準バスケット、10 大分類への集約、標本範囲（本データは二人以上の勤労者世帯）といった算式・カバレッジの差が寄与すると考えられる。

表 13 生計費指数 (2015 年 = 100, 全国) : 公式 CPI とモデル COLI の比較

年	公式 CPI	CES COLI	NH-CES COLI	Törnqvist	NH-CES—CES
2015	100.00	100.00	100.00	100.00	0.000
2016	99.90	100.31	99.85	99.86	−0.455
2017	100.41	100.72	100.42	100.43	−0.300
2018	101.32	101.52	101.42	101.42	−0.102
2019	101.83	101.76	101.80	101.81	+0.038
2020	101.83	101.06	101.01	101.04	−0.052
2021	101.63	100.77	100.85	100.87	+0.076
2022	104.18	102.39	103.28	103.34	+0.894
2023	107.54	106.45	106.53	106.56	+0.075
2024	110.49	109.32	109.53	109.57	+0.209

注: 公式 CPI は総務省『消費者物価指数』全国・総合 (2015 年基準)。CES・NH-CES は (7)・(57) の単位費用を各都道府県で 2015 年 = 100 に基準化し都道府県平均をとった固定効用 COLI。Törnqvist は各年の実支出シェアから構成したモデル非依存の superlative 指数。累積上昇率は公式 CPI +10.49%、CES +9.32%、NH-CES +9.53% で、推計生計費指数 (CES・NH-CES) はいずれも公式 CPI を下回る。NH-CES は Törnqvist にほぼ一致 (差は 0.06 ポイント以内) する一方 CES は下回り、その乖離は NH-CES—CES で 2022 年に +0.894 ポイントで最大となる。

公式 CPI のバイアス計測は物価指数理論の中心的主題であり、その包括的な解説は 阿部 (2023) にまとめられている。とりわけ同書第 12 章はエンゲルカーブを用いた物価計測を主題としており、公式 CPI と需要システムに基づく生計費指数を対照する本節の試みと問題意識を共有する。

4.5.3 効用 (実質消費) 水準への含意

最後に、両モデルが観測された (E_t, p_t) をどのような効用水準として評価するかを比較する。標準的 CES では効用は閉形式 $U_t^{\text{CES}} = E_t/P_t^{\text{CES}}$ で与えられる。NH-CES では Comin et al. (2021) の指摘どおり間接効用関数が解析的に解けないため、支出関数 (23) を C_t について数値的に求解する必要がある。すなわち、所与の (E_t, p_t) と構造パラメーターの下で

$$E_t = C_t \left(\sum_{i \in \Theta_t} a_i^\sigma p_{it}^{1-\sigma} (C_t/\bar{C})^{\epsilon_i-1} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (58)$$

を満たす $C_t > 0$ を一次元求根法 (uniroot) で解く。(58) の右辺は C_t について単調増加であり解は一意である。ただし効用の絶対水準は価格指数の規格化と $\bar{C}$ の選択に依存し識別されないため、2015 年全国値で規格化した $u_t \equiv C_t/C_{2015}$ を直接求解し、時系列

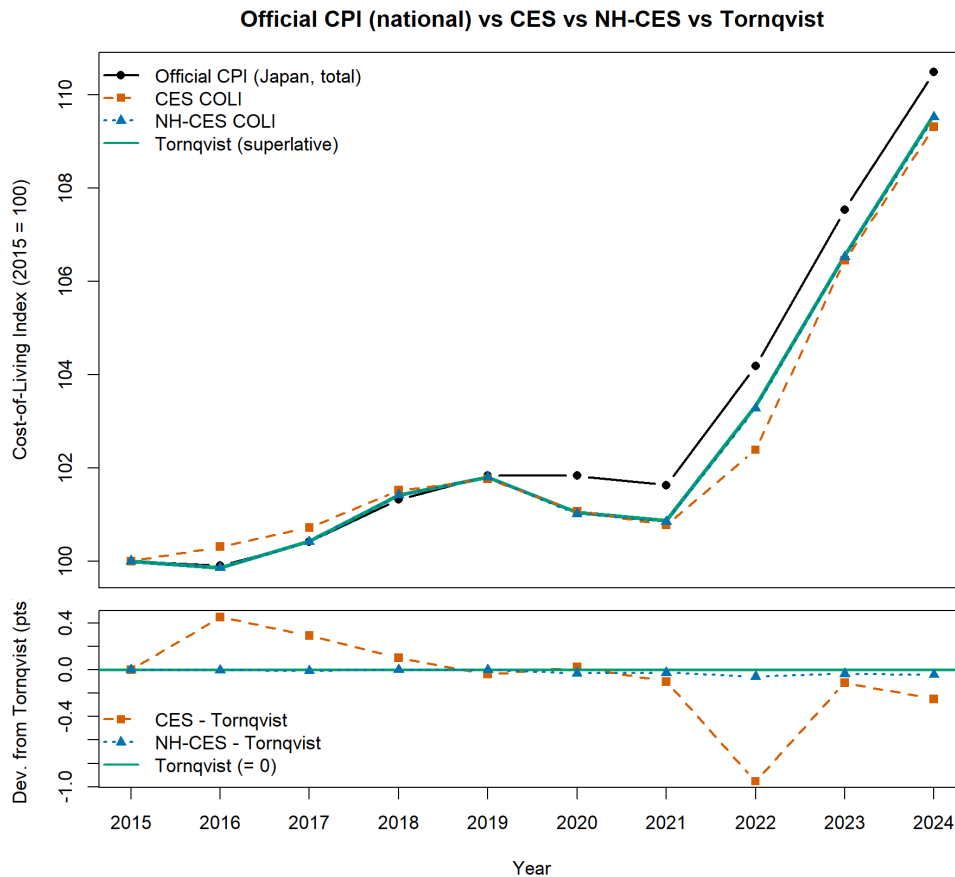


図5 生計費指数 (COLI) の比較：公式 CPI (総務省『消費者物価指数』全国・総合)・CES・NH-CES・Törnqvist 価格指数 (2015 年 = 100)。上段は水準、下段はモデル非依存な superlative 指数 (Törnqvist 価格指数) からの乖離 (指数ポイント、0 線が Törnqvist 価格指数)。推計生計費指数 (CES・NH-CES) は上段で一貫して公式 CPI を下回る (2024 年で約 $-1.0 \sim -1.2$ ポイント)。下段では、NH-CES が Törnqvist 価格指数にほぼ一致する (± 0.06 以内) 一方、ホモセティックな CES は食料・エネルギーが高騰した 2022 年に Törnqvist 価格指数を約 0.95 ポイント下回り、インフレ局面で生計費を過小評価することが直接見てとれる。

インデックスとして提示する。

表 14 および図 6 が示すとおり、名目支出が 2015–2024 年に $+4.3\%$ 増加する一方、両モデルが含意する実質消費 (効用) 水準は約 5% 低下した (2024 年で CES -4.83% 、NH-CES -4.97%)。構造モデルに依存しない指標として名目支出 E を連鎖 Törnqvist 価格指数で除した実質消費も、2024 年に 95.2 (-4.8%) まで低下しており、両モデルの効用水準とほぼ一致する (図 6 上段)。すなわち名目支出の伸びは生計費の上昇 ($+9 \sim 10\%$) に吸収され、家計の実質購買力はむしろ縮小している。これは「はじめに」で示したエン

表 14 効用（実質消費）水準（2015 年 = 100, 全国）

年	名目支出 E	CES 効用	NH-CES 効用	NH-CES–CES
2015	100.000	100.000	100.000	0.000
2016	99.834	99.969	99.988	+0.020
2017	99.745	99.324	99.337	+0.013
2018	100.992	99.584	99.587	+0.003
2019	101.034	99.247	99.240	−0.007
2020	97.885	96.884	96.831	−0.053
2021	98.538	97.703	97.664	−0.039
2022	101.351	98.145	98.069	−0.076
2023	103.458	97.093	97.025	−0.068
2024	104.270	95.175	95.032	−0.142

注：全国は都道府県平均の価格・名目支出で集計。CES は $U_t = E_t/P_t^{\text{CES}}$ 、NH-CES は (58) を `uniroot` で数値求解。効用の絶対水準は識別されないため 2015 年 = 100 に基準化した。

ゲル係数の近年の上昇（図 1）と整合的であり、実質購買力の縮小が必需財である食料の支出シェアを押し上げるという本研究のメカニズムと符合する。ホモセティック対非相似拡大という定式化の違いが効用水準計測に与える差（NH-CES–CES）は、必需財インフレの 2022 年以降に拡大し、2024 年には −0.14 インデックスポイントに達する。これは効用インデックスが定義上 E_t 指数を各モデルの生計費指数で除したものに等しいことから、生計費の比較（表 13）における 2022 年以降の NH-CES–CES 乖離の拡大と表裏一体の結果である。

4.5.4 小括

以上の比較は、本論文の二つの中心的発見が厚生計測の側面でどのように現れるかを整理する。非相似拡大性は横断面・水準における頑健な構造的特徴であり（表 5、4.2.4 節でホモセティックな CES は統計的に棄却される）、嗜好パラメーターの帰属において CES と NH-CES は質的に大きく異なる。この構造の違いは生計費・厚生計測にも現れる。NH-CES の生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数（Törnqvist）をほぼ完全に近似する一方、CES はこれを下回り、その乖離は食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年に約 0.95 ポイントで最大となる（NH-CES–CES で +0.89 ポイント）。効用（実質消費）水準の評価差も 2024 年には −0.14 ポイントへ拡大した。すなわち、ホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費上昇を過小評価しており、非相似拡大チャネルは、平穏な年には目立たないものの、厚生計測の上ではコスト高局面でこそ顕在化

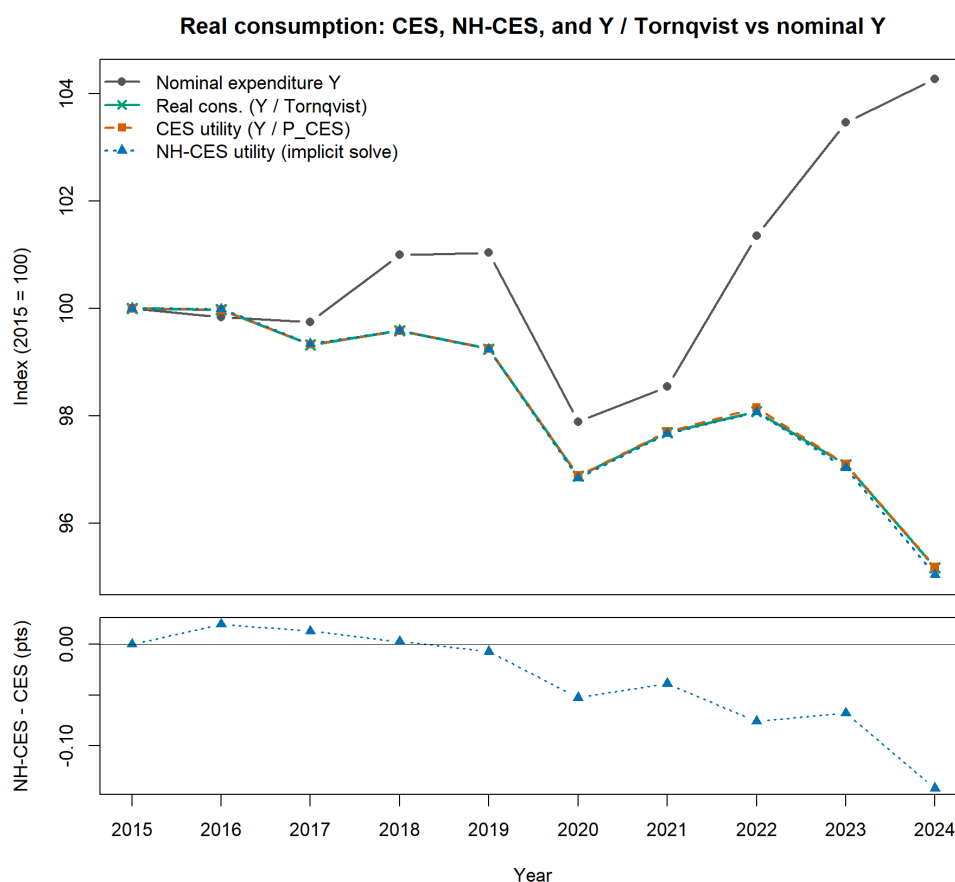


図6 効用（実質消費）水準の比較（2015年＝100，全国）。上段は名目支出 E_t 、 E_t を連鎖 Törnqvist 価格指数で除したモデル非依存の実質消費、および両モデルの効用水準、下段は NH-CES－CES の差（指数ポイント）。名目支出は 2024 年までに +4.3% 増加するが、Törnqvist 実質消費・CES 効用・NH-CES 効用はいずれも約 5% 低下し（2024 年でそれぞれ 95.2・95.2・95.0）ほぼ一致する。両モデルの効用差は 2022 年以降拡大して 2024 年に -0.14 ポイントとなる。

する。

この厚生面の発見は、時系列のエンゲル係数分解が価格主導であった（所得チャネルの寄与が穏当であった）こととも矛盾しない。エンゲル係数分解は食料の「支出シェア」が実質消費の変動にどう応答するか（必需性 $\hat{\eta} = 0.70$ を通じた時系列の所得チャネル）を問うのに対し、生計費比較は同一の価格変動を、非相似拡大的な需要構造（ $\tilde{C}_t^{\epsilon_i-1}$ による重み付け）がホモセティック CES とどう異なって評価するか（横断面・水準の構造チャネル）を問うものである。前者では価格効果が支配的となったが、後者では食料・エネルギーが高騰した局面で CES と NH-CES の生計費指数に無視できない乖離が生じる。所得

チャンネルによる食料シェアの穏当な押し上げも、両定式化の生計費指数の乖離も、本データ期間に実質消費が約 5% 低下し、かつ食料・エネルギー価格が他財より強く上昇したという同じ事実を、異なる経路を通じて映し出したものである。

5 ディスカッション

本研究の実証結果は、近年の日本経済が直面する「物価高と実質賃金低下の併存」が、家計の厚生や消費構造にどれほど深刻な歪みをもたらしているかを定量的に浮き彫りにした。ここでは、抽出された構造パラメーターの分布とシミュレーション結果に基づき、政策的インプリケーションおよび本研究の限界について議論する。

5.1 厚生尺度としてのエンゲル係数

エンゲル係数が注目されるのは、それが簡便な厚生の尺度として解釈できるからである。所得水準も世帯属性も異なる家計の厚生水準を、価格データや需要システムの推定を要せずに比較できる点に、この指標の最大の利点がある。エンゲルの法則にさかのぼるこの用法は、等価尺度 (equivalence scale) の推計をはじめとして長い伝統をもつ (Deaton and Muellbauer, 1980b, Ch.8)。

しかし、家計の効用最大化を前提とすれば、支出シェアは効用水準だけでなく相対価格にも依存する。したがって価格体系が異なる状況の間では、エンゲル係数をそのまま厚生水準の比較に用いることはできない。本節では、本研究の推定結果がこの問題に対してどのような解を与えるかを述べる。

5.1.1 エンゲル係数から厚生変化への逆写像

第 3.6.3 節の (26) と (27) より、食料 (第 f 財) の支出シェアの全微分は

$$d \ln w_{ft} = (1 - \sigma) \left(d \ln p_{ft} - \sum_{k \in \Theta_t} w_{kt} d \ln p_{kt} \right) + (\epsilon_f - \bar{\epsilon}) d \ln C_t \quad (59)$$

と書ける。右辺第 1 括弧内の $\sum_k w_{kt} d \ln p_{kt}$ は生計費の変化率、すなわち Divisia 型の物価上昇率であり、その離散近似が Törnqvist 価格指数である (第 4.1 節)。したがって第 1 項は食料の相対価格の変化を表す。(59) を $d \ln C_t$ について解けば

$$d \ln C_t = \frac{d \ln w_{ft} - (1 - \sigma) (d \ln p_{ft} - d \ln P_t)}{\eta_f - 1} \quad (60)$$

を得る（マクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ のもとで $\epsilon_f - \bar{\epsilon} = \eta_f - 1$ ）。

(60) は、エンゲル係数を厚生尺度として用いるための条件と補正を同時に与える。第一に、食料の相対価格が不変であれば ($d \ln p_{ft} = d \ln P_t$) 第 2 項が消え、エンゲル係数の変化のみから厚生変化が識別できる。これが「価格体系が同一であれば比較可能」という古典的な用法の厳密な条件である。第二に、相対価格が動く場合には、 σ を用いた補正が必要であり、その補正量は観測可能な相対価格変化に $(1 - \sigma)$ を乗じたものである。

第三に、換算率 $1/(\eta_f - 1)$ は食料の総支出弾力性のみによって決まる。本研究の推定値 $\hat{\eta}_f = 0.696$ のもとでこれは -3.29 である。すなわち、相対価格が一定という条件のもとでは、食料支出シェアの 1% の上昇は実質消費の 3.29% の低下に対応する。エンゲル係数を厚生尺度に翻訳する換算率そのものが、本研究の構造推定の産物である。

5.1.2 補正の量的な重要性

以下では変化をすべて対数変化で表す。2015 年から 2024 年にかけて、食料支出シェアは 23.27% から 26.63% へ上昇し、その対数変化は $\Delta \ln w_{ft} = +0.1349$ 、食料の相対価格の対数変化は $\Delta \ln p_{ft} - \Delta \ln P_t = +0.1299$ 、実質消費の対数変化は $\Delta \ln C_t = -0.0494$ である。

食料の相対価格が不変であれば (60) の第 2 項が消え、厚生変化はエンゲル係数の変化のみから $\Delta \ln C_t = \Delta \ln w_{ft}/(\hat{\eta}_f - 1)$ として評価される。 $\hat{\eta}_f - 1 = -0.304$ であるから、この評価量は $0.1349/(-0.304) = -0.444$ である。相対価格が動く場合には分子から $(1 - \hat{\sigma})(\Delta \ln p_{ft} - \Delta \ln P_t) = 0.573 \times 0.1299 = +0.0744$ を差し引く必要があり、評価量は $(0.1349 - 0.0744)/(-0.304) = -0.199$ となる。相対価格の補正を施すだけで、厚生の低下幅の評価は半分以下に縮まる。

もっとも、この -0.199 もなお実際の $\Delta \ln C_t = -0.0494$ の 4 倍である。(60) は嗜好パラメーター a_i を不変とする (19) から導かれており、世帯属性の変化を補正する項をもたないためである。すなわち (60) による逆算は、相対価格を補正してもなお厚生の低下を過大に評価する。これらの評価量は、エンゲル係数を厚生尺度として用いる際に生じる誤差の大きさを示すものであって、本研究の実質消費の推定値ではない。

エンゲル係数の変化そのものを (59) の各項に分解した結果が表 15 である。観測された $+0.1349$ のうち、補償された価格効果が $+0.0744$ 、厚生効果 $(\hat{\eta}_f - 1)\Delta \ln C_t$ が $+0.0150$ 、残る $+0.0455$ が世帯属性の変化とモデルの適合残差である。すなわち観測されたエンゲル係数上昇のうち、厚生水準の変化を反映している部分は約 1 割にすぎない。

表 15 の第 3 行の $+0.0455$ （観測された変化の 33.7%）は、相対価格でも厚生でも説明されない成分である。第 4.3 節の反実仮想を対数変化で評価すると、この成分は世帯属

表 15 食料支出シェアの変化における厚生成分 (2015 年 → 2024 年)

成分	$\Delta \ln w_{ft}$ への寄与	構成比
相対価格 (補償された価格効果)	+0.0744	55.2%
厚生水準 (実質消費の変化)	+0.0150	11.1%
世帯属性の変化・適合残差	+0.0455	33.7%
観測された変化	+0.1349	100.0%

注: 食料支出シェアは 23.27% (2015 年) から 26.63% (2024 年) へ上昇した (47 都道府県平均)。相対価格成分は $(1 - \hat{\sigma})(\Delta \ln p_{ft} - \Delta \ln P_t^T) = 0.573 \times 0.1299$ 、厚生成分は $(\hat{\eta}_f - 1)\Delta \ln C_t = (-0.304) \times (-0.0494)$ として算出。世帯属性の変化・適合残差は残差として求めた。この成分を第 4.3 節の反実仮想を用いて対数変化で分解すると、世帯属性チャンネル +0.0186、適合残差 +0.0281、交互作用 -0.0016 である。

性チャンネル +0.0186 (同 13.8%) とモデルの適合残差 +0.0281 (同 20.8%) に分かれる (交互作用は -0.0016)。すなわち残差の過半はモデルの適合の限界に由来するものであり、この点は第 5.4 節で述べる本研究の限界に対応する。他方、世帯属性チャンネルの寄与 +0.0186 は厚生チャンネルの +0.0150 を上回っており、無視できる大きさではない。世帯規模が支出パターンに与える効果は時間を通じて変化するため、これを補正しなければ、世帯構成の変化に由来するエンゲル係数の変動を厚生や価格の変化に誤って帰属させることになる。Logan (2008) が Engel 曲線による CPI バイアス推計に対して提起した批判はこの点にある。本研究の第 4.4 節の長期分析は、この批判が日本のデータにも当てはまることを示している。1970–2005 年のエンゲル係数の低下 -10.69 % ポイントのうち、価格・厚生 of 2 チャンネルで説明できるのは -3.52 にとどまり、残る -7.17 には、世帯人員の縮小 (3.90 人 → 3.46 人) や世帯主年齢の上昇 (41.1 歳 → 46.9 歳) をはじめとする世帯属性の変化のほか、嗜好や品目構成の変化、モデルの特定化誤差が含まれる (第 4.4 節)。エンゲル係数を厚生比較に用いる際には、相対価格の補正だけでは足りず、世帯属性の変化についても補正を要する。

5.1.3 CPI バイアス推計との識別上の関係

(60) には、本研究の方法論上の位置づけを明確にする含意がある。この式には未知量が $d \ln C_t$ 、 η_f 、 $d \ln P_t$ の三つ含まれるが、観測できるのは $d \ln w_{ft}$ と $d \ln p_{ft}$ のみである。したがって、いずれか二つを外生的に与えなければ残りは識別されない。

Hamilton (2001) および Costa (2001) に代表される CPI バイアス推計の文献は、 η_f をクロスセクションから推定し、Engel 曲線が実質所得について安定的であると仮定したうえで、時系列的なシフトを物価指数の誤測定 $d \ln P_t$ の推定に用いる。すなわち需要システムを所与として物価指数を識別する方向である。

これに対し本研究は、 $d \ln P_t$ を superlative 指数によって外生的に与え、 η_f と σ を識別する。方向が逆であり、両者を同時に識別することはできない。第 3.8 節で述べた Törnqvist 指数による実質化は、この識別上の選択の表現にほかならない。物価指数の誤測定を問題にする文脈では前者が、需要構造そのものを問題にする本研究の文脈では後者が適切な選択である。

5.1.4 小括

以上より、エンゲル係数を厚生尺度として用いることの可否について、本研究は次の答えを与える。エンゲル係数は、相対価格と世帯構成がともに安定している局面においてのみ、換算率 $1/(\eta_f - 1)$ を通じて厚生水準の比較に用いることができる。日本の 1970–2000 年はおおむねその条件を満たす局面であった（第 4.4 節）。しかし 2000 年以降、食料の相対価格は年率 +0.90% で上昇に転じており、この条件は成立しなくなっている。近年のエンゲル係数の上昇を厚生が悪化として読むことは、その約 9 割を相対価格と世帯構成の変化に帰すべきところを厚生に帰することになり、深刻な誤りを生む。本研究の構造推定は、この補正に必要な σ と η_f を提供する点に、厚生計測上の意義をもつ。

5.2 政策的・厚生的含意

第一に、マクロ経済政策に対する含意である。長らく日本において、エンゲル係数の上昇は「食料品価格の相対的な高騰（外部ショック）」や「食の外部化・高級化」といった要因で語られることが多かった。本研究の要因分解は、2015 年–2024 年のエンゲル係数上昇に関する限り、その主因が食料品の相対価格高騰（価格効果）であり、財の代替が困難（ $\sigma < 1$ ）なために名目食料支出シェアが押し上げられたことを定量的に示した。したがって、当面のエンゲル係数上昇という現象に対しては、食料・エネルギーの相対価格や全般的なインフレへの対処が、その近接的な駆動要因に直接働きかけることになる。

同時に、本研究は日本の需要システムが頑健に非相似拡大的であること、すなわち食料が必需財（総支出弾力性は約 0.7）、教育や教養娯楽が奢侈財（同 1 超）であることを識別した。この構造の下では、実質消費支出の減少は、たとえ当該期間のトレンドへの寄与が穏当であったとしても、本質的には食料などの必需品消費へ予算を偏らせ、教育・教養娯楽といった裁量的消費や人的資本投資を圧迫する方向に作用する。本分析期間における所得効果の量的寄与が穏当（モデル総効果の約 14%）にとどまったのは、実質消費が約 5% 低下したものの、食料の必需性が穏当（ $\hat{\eta} = 0.70$ ）であり、実質消費の低下が食料シェアにもたらす押し上げが量的に小さいことの反映である。より大きな、あるいは持続的な実

質消費の減少局面では、この非相似拡大的なチャンネルがさらに顕在化しうる。

ここで、所得チャンネルの解釈には注意を要する。第 4.4 節で示したとおり、2015–2024 年に減少したのは実質消費支出であって実質可処分所得ではない。実質可処分所得はむしろ +10.8% 増加しており（家計簿改正の影響を調整しても +7% 程度）、実質消費支出の減少は平均消費性向の低下、すなわち貯蓄率の上昇によるものである。この点は、2000 年代の実質消費減少が実質可処分所得の減少を反映していたのとは対照的である。したがって、近年のエンゲル係数上昇の所得チャンネルを「実質購買力の低下」と表現するのは正確ではない。

もっとも、このことは所得チャンネルが政策的に無害であることを意味しない。貯蓄率の上昇が年金・税制への不安に起因する予備的動機によるものであれば、それは不確実性の増大という厚生損失を伴う。他方、賃金上昇が残業代・賞与という一時的所得に偏ったことによる平準化であれば厚生中立に近い（齋藤, 2022）。本研究は総消費支出を所与とした期内の配分問題を扱っており、この識別は枠組みの外にある。同様の理由から、本研究の C_t の低下は期内の効用水準の低下を意味するものであって、生涯厚生 of 低下と同一視することはできない。

それゆえ政策的な含意は次の 2 点に整理される。第一に、当面のエンゲル係数上昇に対しては相対価格の歪みへの対処が直接的な処方である。第二に、所得チャンネルについては、実質賃金の底支えに加えて、家計が消費を抑制して貯蓄を積み増している背景が将来不安にあるのか所得の一時性にあるのかを明らかにすることが、政策設計上の前提となる。本研究の枠組みはこの問いに答えないが、非相似拡大的な需要構造の下では、実質消費支出の減少がその原因を問わず必需品偏重をもたらすことを定量的に示した点で、問いの重要性を裏づけている。

第二に、長期的な経済成長への含意である。本研究の推定において、教育や教養娯楽の非相似拡大性パラメーターは有意に高く（教育の総支出弾力性は約 2.5）、これらが強い奢侈財として振る舞うことが確認された。この非相似拡大的な構造は、実質購買力が低下する局面において、これらの財への支出シェアが構造的に縮小しうることを含意する。次世代への教育投資や文化・イノベーションへの支出がマクロレベルで先細りする可能性は、日本の長期的な潜在成長率を押し下げる負の連鎖（Vicious cycle）の懸念につながる。ただし、本分析期間（2015–2024 年）に関する限り、こうした奢侈財シェアの縮小が時系列的に大きく顕在化したわけではなく、これは前述の通り所得効果の当該期間における寄与が穏当であったことと整合的である。

第三に、生計費および厚生計測への含意である。本研究の推定パラメーターを用いて標準的 CES と NH-CES の生計費（単位費用）指数と効用水準を試算・比較すると（表 12、

13、14)、両モデルは平均的な消費バスケットの帰属について質的に異なる解釈を与える。食料への嗜好ウェイトは CES で 0.50、NH-CES で 0.45 と乖離する。この構造の違いは生計費・厚生計測にも現れる。NH-CES の生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数 (Törnqvist) をよく近似する一方、CES はこれを下回り、食料・エネルギー価格が高騰した 2022 年には NH-CES の生計費が CES を +0.89 ポイント上回る。効用水準の評価差も 2024 年には -0.14 ポイントへ拡大する。すなわちホモセティック CES は必需財インフレ局面の生計費上昇を過小評価する。この需要構造に起因する差は、平穏な年には小さいものの、2022 年には推計生計費指数と公式 CPI の乖離と同程度に達し、従来想定されたほど無視できるものではない。なお名目支出の伸び (+4.3%) は生計費上昇に吸収され、実質消費 (効用) 水準は当該期間に約 5% 低下した。両モデルの厚生評価の乖離は必需財インフレ局面で最も大きく、より大きな実質消費の変動や所得階層間の異質性を考慮した分析では、非相似拡大チャンネルがさらに顕在化しうる点に留意が必要である。

なお、推計生計費指数 (CES・NH-CES) は公式 CPI を下回って推移し、2024 年でその乖離は約 1.0~1.2 ポイントに達する。この計測側の乖離 (指数算式・品目バスケット・標本範囲の差に起因) と、需要構造の選択に起因する差 (2022 年で +0.89 ポイント) は同程度であり、厚生計測においては需要システムの定式化と価格指数の構築方法の双方への注意が要請される。

5.3 費目分類と基準財の選択に関する留意点

本研究は総務省の 10 大費目を分析単位とし、すべての費目に共通の代替の弾力性 σ を課している。この設定には三つの留意点がある。

5.3.1 基準財の選択

本研究は光熱・水道を基準財としている。この選択には二つの理由がある。

第一に、相対価格 $\ln(p_{irt}/p_{brt})$ に十分な変動が必要である。基準財の価格が動かなければ、9 本すべての相対価格の変動が対象財側の変動のみに依存し、 σ の識別が弱くなる。10 大費目の価格指数の変動係数を比べると光熱・水道は 8.1% であり、候補として考えられる交通・通信 (3.1%) や保健医療 (2.5%) を大きく上回る。

第二に、非相似拡大性の分布における位置である。推定されるのは相対非相似拡大性 ($\epsilon_i - \epsilon_b$) であるから、基準財が分布の中央付近にあると差の絶対値が小さくなり、個別の識別が困難になる。光熱・水道は $\hat{\epsilon}_b = 0.405$ と分布の下端に位置し、 $|\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b|$ の平均は 0.790、最大は 2.102 である。これに対し保健医療 ($\hat{\epsilon}_b = 0.797$) では平均 0.513、交通・

通信 ($\hat{\epsilon}_b = 0.838$) では平均 0.518 にとどまる。この差は個別有意性に現れる。 $|t| > 1.96$ となる相対非相似拡大性の本数は、光熱・水道を基準財とした場合の 9 個中 4 個に対し、保健医療で 3 個、交通・通信で 1 個である (表 16 の Panel A)。以上の二つの理由から、本研究は光熱・水道を基準財とする。ただしこれは 3 つの候補の比較に基づく判断であり、二つの理由の寄与を分離したものではない。

■感応度分析 基準財を交通・通信および保健医療に置き換えて再推定した結果を表 16 に示す。

総支出弾力性 $\hat{\eta}_i$ は基準財の選択に対して極めて安定している。理論上、相対非相似拡大性の差 $\epsilon_i - \epsilon_j$ は基準財によらず、規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ を施した後の絶対水準も一致するはずであり、推定結果はこれを裏づけている。3 基準財間の $\hat{\eta}_i$ の幅は最大でも 0.121 (保健医療) であり、食料の総支出弾力性のブートストラップ 95% 信頼区間の幅 0.511 (表 7) と比べて 4 分の 1 以下にとどまる。奢侈財・必需財の分類は 10 費目すべてで 3 基準財間で一致する。

他方、代替の弾力性の推定値は $\hat{\sigma} = 0.427$ (光熱・水道)、0.552 (保健医療)、0.657 (交通・通信) と動く。推定式において $(1 - \sigma)$ は 9 本の式に共通の単一パラメーターであるから、真に共通の σ が存在するならば基準財の変更は推定値を動かさないはずである。したがってこの変動は、10 大費目すべてに単一の代替の弾力性を課するという制約が厳密には満たされていないことの現れと解される。これは本節の冒頭で述べた consistent aggregation の要件と同じ論点であり、本研究の推定はその制約が近似であることを定量的に示している。ただし費目間で代替の弾力性が異なることを正面から検証するには、より多くのパラメーターを許容する需要システム (AIDS 等) による推定が必要であり、本研究の枠組みでは扱えない。この検証は今後の課題である。

もっとも、この σ の変動が本研究の中心的な結論を左右することはない。要因分解において価格チャネルは $(1 - \sigma)$ に比例し、所得チャネルは σ に依存しないから、 $\hat{\sigma}$ が最も大きい交通・通信を基準財とした場合でも価格効果は +1.106 % ポイントとなり、所得効果 (+0.363 % ポイント) の 3.05 倍である (表 16 の Panel C)。エンゲル係数上昇が価格主導であるという結論は、基準財の選択に対して頑健である。

5.3.2 consistent aggregation とマクロモデルへの接続

第 1 節で述べたとおり、NH-CES の利点のひとつは、マクロ経済の多部門モデルや構造転換論と同型の関数形を共有しうる点にある。ただしこの利点は潜在的なものにとどまり、本研究の推定結果をそのままマクロモデルの需要ブロックとして用いることを意味

表 16 基準財の選択に対する感応度（主推定 FE: 地方ブロック, $N = 4,230$ ）

Panel A: 推定されたパラメーターと識別					
基準財	価格変動係数	$\hat{\sigma}$	結合 Wald $\chi^2(9)$	個別有意	価格 IV 第 1 段 F
光熱・水道（本研究）	8.1%	0.427	80.23	4/9	1,137.1
保健医療	2.5%	0.552	82.37	3/9	2,026.9
交通・通信	3.1%	0.657	86.76	1/9	4,279.5

Panel B: 総支出弾力性 η_i					
分類 (Item)	光熱・水道	保健医療	交通・通信	幅	判定の一致
教育	2.507	2.517	2.524	0.017	奢侈
被服及び履物	1.829	1.819	1.809	0.020	奢侈
教養娯楽	1.601	1.608	1.611	0.010	奢侈
その他の消費支出	1.053	1.066	1.076	0.023	奢侈
保健医療	0.918	0.797	0.902	0.121	必需
交通・通信	0.847	0.856	0.838	0.018	必需
住居	0.734	0.798	0.849	0.115	必需
食料	0.696	0.678	0.660	0.036	必需
家具・家事用品	0.572	0.559	0.545	0.027	必需
光熱・水道	0.405	0.416	0.392	0.024	必需

Panel C: 要因分解への含意（食料シェアの 2015→2024 年変化）				
基準財	$1 - \hat{\sigma}$	価格効果	所得効果	価格／所得
光熱・水道（本研究）	0.573	+1.848	+0.363	5.09
保健医療	0.448	+1.445	+0.363	3.98
交通・通信	0.343	+1.106	+0.363	3.05

注: Panel A の価格変動係数は 10 大分類の価格指数 p_{irt} の標本全体における変動係数。個別有意は $|t| > 1.96$ となる相対非相似拡大性 $(\epsilon_i - \epsilon_b)$ の個数（全 9 個中）。標準誤差はいずれも 47 都道府県を単位とする CR2。Panel B の $\hat{\eta}_i$ はマクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ のもとで復元した水準であり、理論上は基準財に依存しない。「幅」は 3 基準財間の最大値－最小値。判定は $\hat{\eta}_i > 1$ を奢侈財、 $\hat{\eta}_i < 1$ を必需財とするもので、10 費目すべてで 3 基準財間で一致する。Panel C は価格チャネルが $(1 - \sigma)$ に比例し所得チャネルが σ に依存しないことを用いた換算（% ポイント）。

しない。

第一に、財を集計しても需要システムの関数形が保存されるという意味での consistent aggregation が厳密に成立するには、集計されるサブグループ内で代替の弾力性が共通でなければならない。10 大費目のそれぞれは異質な品目の集合であり（後述する「その他の消費支出」や「食料」がその典型である）、各費目内で σ が共通であるという前提は厳密には満たされない。第二に、10 大費目は家計簿の用途分類であって、マクロモデルが用いる生産部門分類（農業・製造業・サービス業など）とは対応しない。両者を接続するには用途分類と産業分類の変換が必要であり、本研究はその作業を行っていない。第三に、本

研究は一般均衡モデルを解いておらず、需要側の部分均衡分析にとどまる。

したがって本研究の主張は、NH-CES がマクロ理論と同型の関数形を共有するという水準に限定される。推定された σ と ϵ_i をマクロモデルのカリブレーションに用いるには、少なくとも部門分類の対応づけと、費目内の代替の弾力性の異質性に関する検討が別途必要である。

5.3.3 「その他の消費支出」の位置づけ

「その他の消費支出」は支出シェアが 0.198 と食料に次いで大きい一方、諸雑費・こづかい・交際費・仕送り金などを含む残差的かつ混合的な費目であり、単一の財としての経済的解釈が難しい。この費目を対象財に含めることの妥当性について述べる。

まず、除外という選択肢は採りえない。本研究の推定は支出シェアの体系であり、 $\sum_i w_{it} = 1$ が推定式的前提である。特定の費目を除外すれば残りのシェアが再定義され、他の費目のパラメーターの解釈が変わってしまう。またマクロ整合的規格化 $\bar{\epsilon} = \sum_i w_{it}\epsilon_i = 1$ も全費目を対象とする定義である。

そのうえで、この費目が他財のパラメーター推定に与える影響を確認しておく。推定された相対非相似拡大性 ($\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b$) の支出シェア加重和は 0.594 であり、これが規格化定数 $\hat{\epsilon}_b = 1 - \sum_i w_i(\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_b) = 0.405$ を決めている。「その他の消費支出」の寄与は $0.198 \times 0.648 = 0.128$ で、全 10 費目のうち最大 (21.6%) である。すなわち、この費目のパラメーターは水準の規格化を通じてすべての $\hat{\eta}_i$ に影響する。

もっともその影響は量的には小さい。仮に「その他の消費支出」を規格化の対象から外し、残り 9 費目でシェア加重平均を 1 とする規格化を課すと、 $\hat{\epsilon}_b$ は 0.405 から 0.419 へ変化し、 $\hat{\eta}_{\text{食料}}$ は 0.696 から 0.710 へ動くにとどまる。有意に識別された 5 財の分類（教育・被服及び履物・教養娯楽が奢侈財、食料・家具家事用品が必需財）はいずれも保たれる。また表 7 が示すとおり「その他の消費支出」自身の総支出弾力性は $\hat{\eta} = 1.053$ (95% 信頼区間 [0.672, 1.455]) で、1 から有意に異なると判定されない。この不確実性は、wild クラスター・ブートストラップの各 draw に規格化を施して $\hat{\eta}_i$ を再構成する手続き（第 4.2.7 節）を通じて、他財の信頼区間にすでに織り込まれている。

以上より、この費目の残差的性格は本研究の主結論を左右しない。ただし、その総支出弾力性の推定値自体は経済的に解釈すべきではなく、本研究もこれを奢侈財・必需財のいずれとも判定していない。

5.3.4 食料内部の異質性

本研究は食料を単一の財として扱い、総支出弾力性 $\hat{\eta}_{\text{食料}} = 0.696$ から必需財と識別している。しかし食料は穀類・生鮮食品・加工食品・外食など、総支出弾力性の大きく異なる品目を含む。とりわけ『家計調査』の10大費目における「食料」は外食を含んでおり、必需性の強い穀類と奢侈的性格をもつ外食が同一の費目に混在している。したがって推定された0.696はこれらの混合体の弾力性であって、基礎的食料に限れば必需性はより強いと考えられる。

近年の食料インフレがこの内訳に対して一様でないことも確かである。総務省『消費者物価指数』によれば、2025年の前年比は総合が+3.2%、食料が+6.8%であったのに対し、食料の内訳では穀類が+21.9%（うち「うるち米（コシヒカリを除く）」は+67.2%）と突出する一方、外食は+4.0%、生鮮食品は+5.6%にとどまった。すなわち近年の食料価格上昇は、食料のなかでも最も必需性の強い品目に偏在している。

この偏在が本研究の推定に与える影響は、価格側と所得側で方向が異なる。

所得側については、本研究の推定値は保守的（必需性を過小に評価する方向）と考えられる。実質消費支出が減少する局面では、家計は食料の内部で外食から自炊へ配分を移す。同じ食料摂取に対する支出額が下がるため、観測される食料シェアの上昇は、食料が同質財であった場合よりも小さくなる。したがって $\hat{\eta}_{\text{食料}}$ は1の側へ引き寄せられ、基礎的食料の必需性は過小に評価される。

価格側については二つの効果が逆方向に働く。一方で、穀類の代替可能性は外食のそれより低いと考えられるため、全費目共通の $\hat{\sigma} = 0.427$ を穀類主導の価格ショックに適用することは代替を過大に見積もり、価格チャンネルを過小評価する。他方で、食料内部の価格指数は品目レベルで固定ウェイト型に構成されているため、内部での代替が生じる局面では食料の価格上昇を過大に測る。本研究のTörnqvist指数は10大費目の水準でシェアを更新するが、費目内部については消費者物価指数の構造を継承するため、この代替バイアスは残る。正味の方法は事前には定まらない。

いずれにせよ、10大費目の粒度では食料内部のメカニズムを分離できない。この点については、米価格の上昇に焦点を当ててAIDS/QUAIDSにより細分化された品目レベルの分析を行った阿部・他(2026)が本研究と補完的な関係にある。費目内の異質性を明示的に扱う需要システムの推定は、本研究の残された課題である。

5.4 方法上の限界：二段階手続きの代償

本研究は、第1段階で Törnqvist 価格指数により実質消費インデックス $C_{rt} = E_{rt}/P_{rt}^T$ を構築し、第2段階でこれを所与として需要システムを線形推定するという二段階の手続きをとっている。Comin et al. (2021) が閉形式 (46) を用いて C_t を推定式から消去し、非線形性に構造推計で対応しているのと対照的である。この選択には代償があり、明示しておく必要がある。

代償とは、厚生水準の低下幅が第1段階で確定し、第2段階の構造推計とは切り離されているという点である。すなわち、本研究が中心的な課題として掲げた「価格の影響と厚生水準の変化の分離」は、構造推計の内部で完結してはいない。第1節で述べたとおり、構造推計が与えるのは伝播の写像 (σ と η_i) であって、入力である $\Delta \ln C$ ではない。

もっとも、この代償が結論を左右しうる範囲は限定的である。第一に、二段階化そのものはモデルと整合的である。効用水準をデフレーター型の実質消費インデックスとして表現できることは規格化 $\bar{\epsilon} = 1$ と同値であり (第3.8節)、その規格化のもとで正しいデフレーターは NH-CES の単位費用関数である。Törnqvist 指数は superlative 指数としてこれを二次の精度で近似し (Diewert, 1976)、事後的にも推定された NH-CES の生計費指数と全期間で 0.06 ポイント以内で一致する (第4.5節)。第二に、指数算式の選択が $\Delta \ln C$ に与える幅は、上方バイアスをもつ Laspeyres と下方バイアスをもつ Paasche の双方をとっても $\pm 2\%$ にとどまり、価格効果が所得効果を上回るという要因分解の順序はいずれの算式でも保たれる (表10)。

他方で、本研究のデータにおいて完全な構造推計の経路が開かれていないことも事実である。(46) を通じた C_t の消去は、基準財の支出シェアの測定誤差を $1/(\sigma - \epsilon_b)$ 倍に増幅するが、本研究の主推定では $\hat{\sigma} - \hat{\epsilon}_b = 0.022$ であり、この係数は 45.5 に達する (第3.8節)。これは手法の優劣というより、データの変動量に応じた手法選択の問題である。Comin et al. (2021) が対象とする国際横断・長期のデータでは所得水準の変動が桁違いに大きく、閉形式の経路が十分な識別力をもつ。これに対し本研究の都道府県パネル (2015–2024 年) では実質消費支出の変動係数が 8.5% (表2) にすぎず、同じ経路は数値的に成立しない。より長期の、あるいは所得階層方向の変動を含むマイクロデータを用いれば、完全な構造推計による分離が可能になると考えられる。この方向は今後の課題である。

最後に、本研究の限界と今後の課題について付記する。本研究は、都道府県レベルのパネルデータおよび集計された地域差物価指数を用いた「代表的家計 (Representative agent)」の枠組みに立脚している。しかし、Non-homothetic な選好の性質上、実質購買

力の低下に伴うエンゲル係数の押し上げ圧力は、限界消費性向が異なり予算制約が厳しい低所得層において非線形により強く発現するはずである。今後は『家計調査』の個票データ（マイクロデータ）を用い、世帯の所得階層別や世帯類型別の異質性（Heterogeneity）を考慮した需要システムの推定を行うことで、物価高と所得低下がもたらす格差拡大のメカニズムをさらに精緻に解明することも今後の課題である。

6 結語

本研究は、近年の日本における食料品エンゲル係数の上昇要因を、マクロ経済学の構造転換論で標準的に用いられる Implicitly Non-homothetic CES (NH-CES) 需要システムを応用することで、「価格効果」と「所得効果」に要因分解し、あわせて世帯属性の変化の寄与も評価した。

空間的 Hausman 型操作変数法 (IV) を用いたパネルデータ分析の結果、本研究は2つの結論を得た。第一に、日本の家計の需要システムは頑健に非相似拡大的であり、地方ブロック固定効果による主推定では結合 Wald 検定がホモセティック制約を強く棄却した。教育・被服・教養娯楽を有意な奢侈財、食料・家具を有意な必需財とする総支出弾力性の序列は wild クラスタ・ブートストラップに支持され、すべての財の総支出弾力性を1に制約するホモセティック CES の仮定は棄却される。第二に、2015年から2024年のエンゲル係数上昇の主因は食料品の相対価格の高騰であり、その寄与はモデル総効果の約69%を占めた。財の代替が困難 ($\hat{\sigma} = 0.427 < 1$) であるため、相対価格の上昇が名目の食料支出シェアを押し上げたのである。非相似拡大的な所得効果も同方向に作用するが、その寄与は穏当 (同 13.5%) で、世帯構成の変化 (人口属性効果, 同 16.6%) と同程度であった。非相似拡大性という需要の構造的特性と、価格主導であった時系列のエンゲル係数上昇とは、それぞれ横断面と時系列という別個の側面に関する事実であり、両立する。

さらに、CES と NH-CES の生計費指数と効用水準を試算・比較したところ、名目支出の伸びは生計費上昇に吸収され、実質消費は当該期間に約5%低下した。NH-CES の生計費は実支出シェアから構成した superlative 指数 (Törnqvist) をよく近似する一方、CES はこれを下回り、食料・エネルギー価格が高騰した2022年には NH-CES が CES を +0.89 ポイント上回った。すなわちホモセティック CES がインフレ局面の生計費を過小評価することが示された。この厚生面の非相似拡大効果は、時系列のエンゲル係数上昇が価格主導であったこととは分析の側面を異にしており、両者は整合的である。需要構造の選択が生計費計測に及ぼす影響は、とりわけインフレ局面では、計測側の選択 (指数算式・データ範囲) と同程度であり、今後の厚生計測において需要システムの定式化と価格

指数の構築方法の双方への留意が重要であることを示唆している。

同一の構造パラメーターを 1970 年まで遡って適用した長期分析からは、エンゲル係数の上昇が近年まで問題にならなかった理由が明らかになった。1990 年から 2005 年にかけて所得チャネルは既に正に転じていたが、その大きさは世帯人員の縮小などを反映する残差に埋もれる程度にとどまっていた。局面を分けたのは食料の相対価格の趨勢転換であり、1970 年から 2000 年まで年率 -0.11% でほぼ横ばいであった食料の相対価格は、2000 年を境に年率 $+0.90\%$ の上昇に転じている。

また本研究の推定は、エンゲル係数を厚生尺度として用いるための条件と補正を与える。食料の相対価格が一定であればエンゲル係数の変化のみから厚生変化を評価できるが、相対価格が動く場合には σ を用いた補正が必要であり、厚生変化への換算率 $1/(\hat{\eta}_f - 1)$ は食料の総支出弾力性によって決まる。2015 年から 2024 年について実際に分解すると、観測されたエンゲル係数上昇のうち厚生水準の変化を反映している部分は約 1 割にすぎない。エンゲル係数を無補正で厚生の指標として読むことは、相対価格と世帯属性の変化に帰すべき部分を厚生に帰することになる。

19 世紀にエルンスト・エンゲルが見出した、所得水準と食料費シェアの間の負の関係は、本研究の構造推定においても、日本の家計需要の頑健な特性として確認された（食料は明確な必需財である）。もっとも、近年のエンゲル係数の急上昇という現象そのものは、この所得チャネルよりも、食料品の相対価格高騰によって主に駆動されていた。いずれにせよ、エンゲル係数の動向とその背後にある需要構造は、国民の生活水準と消費配分を映す指標として依然として有効な分析対象であることを、本研究の結果は再確認するものである。

参考文献

- 総務省統計局 (2019). 「家計簿改正による集計値への影響 (変動調整値の算出)」『家計調査』時系列データ関連資料. <https://www.stat.go.jp/data/kakei/longtime/pdf/hendo2019.pdf> (2026 年 9 月確認) .
- 齋藤潤 (2022). 「家計貯蓄率はなぜ上昇しているのか」日本経済研究センター コラム (2022 年 2 月 1 日) . <https://www.jcer.or.jp/j-column/column-saito/2022021.html> (2026 年 9 月確認) .
- Atkin, D., Faber, B., Fally, T., & Gonzalez-Navarro, M. (2024). "Measuring Welfare and Inequality with Incomplete Price Information". *The Quarterly Journal of Economics*, 139(1), 419–475.
- Cameron, A. C., Gelbach, J. B., & Miller, D. L. (2008). "Bootstrap-Based Improvements for Inference with Clustered Errors". *The Review of Economics and Statistics*, 90(3), 414–427.
- Comin, D., Lashkari, D., & Mestieri, M. (2021). "Structural Change With Long-Run Income and Price Effects". *Econometrica*, 89(1), 311–374.
- Costa, D. L. (2001). "Estimating Real Income in the United States from 1888 to 1994: Correcting CPI Bias Using Engel Curves". *Journal of Political Economy*, 109(6), 1288–1310.
- Hamilton, B. W. (2001). "Using Engel's Law to Estimate CPI Bias". *American Economic Review*, 91(3), 619–630.
- Logan, T. D. (2008). "Are Engel Curve Estimates of CPI Bias Biased?". NBER Working Paper No. 13870.
- Deaton, A., & Muellbauer, J. (1980a). "An Almost Ideal Demand System". *The American Economic Review*, 70(3), 312–326.
- Deaton, A., & Muellbauer, J. (1980b). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511805653.
- Diewert, W. E. (1976). "Exact and Superlative Index Numbers". *Journal of Econometrics*, 4(2), 115–145.
- Feenstra, R. C. (1994). "New Product Varieties and the Measurement of International Prices". *The American Economic Review*, 84(1), 157–177.
- Hanoch, G. (1975). "Production and Demand Models with Direct or Indirect Implicit

- Additivity". *Econometrica*, 43(3), 395–419.
- Hausman, J., Leonard, G., & Zona, J. D. (1994). "Competitive Analysis with Differentiated Products". *Annales d'Économie et de Statistique*, (34), 159–180.
- Hausman, J. A. (1996). "Valuation of New Goods under Perfect and Imperfect Competition". In T. F. Bresnahan & R. J. Gordon (Eds.), *The Economics of New Goods* (pp. 207–248). University of Chicago Press.
- Houthakker, H. S. (1957). "An International Comparison of Household Expenditure Patterns, Commemorating the Centenary of Engel's Law". *Econometrica*, 25(4), 532–551.
- International Monetary Fund, International Labour Organization, Organisation for Economic Co-operation and Development, Eurostat, United Nations Economic Commission for Europe, & World Bank (2020). *Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods*. Washington, D.C.: International Monetary Fund.
- Konüs, A. A. (1939). "The Problem of the True Index of the Cost of Living". *Econometrica*, 7(1), 10–29.
- Matsuyama, K. (2019). "Engel's Law in the Global Economy: Demand-Induced Patterns of Structural Change, Innovation, and Trade". *Econometrica*, 87(2), 497–528.
- Mundlak, Y. (1978). "On the Pooling of Time Series and Cross Section Data". *Econometrica*, 46(1), 69–85.
- Nevo, A. (2001). "Measuring Market Power in the Ready-to-Eat Cereal Industry". *Econometrica*, 69(2), 307–342.
- Sato, K. (1976). "The Ideal Log-Change Index Number". *The Review of Economics and Statistics*, 58(2), 223–228.
- Törnqvist, L. (1936). "The Bank of Finland's Consumption Price Index". *Bank of Finland Monthly Bulletin*, 16(10), 1–8.
- Vartia, Y. O. (1976). "Ideal Log-Change Index Numbers". *Scandinavian Journal of Statistics*, 3(3), 121–126.
- 阿部修人 (2023). 『物価指数概論：指数・集計理論への招待』．日本評論社.
- 阿部修人・稲倉典子・外木暁幸 (2026). 「近年の米価格上昇とその需要システムの分析」．*RCESR Discussion Paper Series*, No. DP26-1. 一橋大学経済研究所経済社会リスク研究機構.
- 小嶋大造・大澤秀暁・村上太郎・福島宏祐・小池孝英 (2017). 「食料価格上昇局面における家計消費とエンゲル係数：所得階層別の変化要因の分析」．*KIER Discussion Paper*,

No. 1706, 1-33. 京都大学経済研究所.

竹内悠大・住本雅洋 (2020). 「エンゲル係数変動の要因分析」. 『農業経済研究』, 91(4), 466-471.