
RCESR Discussion Paper Series

POS データからみた生計費指数と物価指数
数学 Appendix

2015 年 9 月

阿部修人
一橋大学経済研究所

稲倉典子
大阪産業大学

遠田敏生
松戸市役所

外木暁幸
一橋大学経済研究所

RCESR

一橋大学 経済研究所
経済社会リスク研究機構

〒186-8603 東京都国立市中 2-1
<http://risk.ier.hit-u.ac.jp/>

POSデータからみた生計費指数と物価指数
数学Appendix¹

阿部修人²
一橋大学経済研究所

遠田敏生
松戸市役所

稲倉典子
大阪産業大学
外木暁幸
一橋大学経済研究所

2015年9月

要約

本稿は阿部・稲倉・遠田・外木(2015)のコンパニオン論文であり、本論で展開されている数式展開の補論、および詳細な統計表を掲載する。

JEL: E31, C43

Keywords: 生計費指数、物価指数、代替の弾力性、POSデータ、CES

¹ 本論文は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究A(15H01945)および基盤研究C(15K03349)の成果物である。また、上野有子、田中晋矢両氏から貴重なコメントを頂いた。さらに、本研究の遂行にあたり、株式会社インテージから貴重なデータの提供を受けた。ここに感謝したい。

² 東京都国立市中 2-1 一橋大学経済研究所. E-mail: nabe@ier.hit-u.ac.jp.

目次

[1] Sato-Vartia 型 COLI の導出	3
[2] Feenstra 型 COLI の性質	5
[3] Feenstra 流弾力性(弾力性(1))	6
[4] 数量を用いる弾力性の推計(弾力性(2)).....	9
[5] 財間(Between)の情報を用いた弾力性の推計(弾力性(3)).....	10
[6] Balk の弾力性(弾力性(4))	11
[7] データ	13
[8] スーパーと GMS 両方を含む弾力性推定結果表.....	16
[9] COLI の推定結果.....	18
[10] 時差相関表.....	20
[11] 特売比率の計測方法.....	20
[12] 参考文献.....	21

図表一覧

表 1: SRI データの記述統計

表 2: COLI 及び価格指数計算に用いる SRI データのパネル記述統計(GMS)

表 3: 弾力性推計値

表 4: 推計方法別弾力性間の相関行列

表 5:物価上昇実感と生計費指数の Cross-Correlation

図 1: 弾力性を用いた COLI と Sato-Vartia 型価格指数の比較

図 2: 商品の変遷を考慮した Feenstra (1994)型の COLI と Sato-Vartia 型価格指数の比較

図 3: λ -Ratio と継続商品売上比率

図 4: 容量単価指数とその他 COLI、価格指数の関係

[1] Sato-Vartia 型 COLI の導出

効用関数として下記を仮定する。

$$U_t = \sum_{j=1}^J \beta_{jt} \ln C_{j,t}, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^J \beta_{jt} = 1.$$

ただし、 $C_{j,t}$ は品目 j の t 期におけるアグリゲーターであり、 β_{jt} は各品目への支出シェアとなる。煩雑さを避けるために j を落として記述すると下記のようなになる。

$$C_t = \left(\sum_{i=1}^{I_t} a_{it} x_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad a_{it} \geq 0,$$

ここで、 x_{it} は財 i の t 期における消費量である。 σ は正の値をとる代替の弾力性であり、1のときにコブ・ダグラス型となる³。この効用関数に対応する支出関数は下記で表すことが可能である⁴。

$$E(p_t, b_t, C_t) = C_t \left(\sum_{i=1}^{I_t} b_{it} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

ここで、 $b_{it} = a_{it}^\sigma$ である。

なお、 p_{it} は財 i の t 期における価格である。シェファード・マッケンジーの補題より

$$x(p_t, C_t) = \frac{\partial E}{\partial p_{it}} = C_t \left(\sum_{i=1}^{I_t} b_{it} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} b_{it} p_{it}^{-\sigma}$$

財 i の当該品目における支出シェアは

$$s_{it} = \frac{p_{it} x_{it}}{E_t}$$

³ ここでは、財の数 I_t は時間により変化しうることに注意されたい。

⁴ この導出の詳細に関してはFeenstra (1994)を参照せよ。

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_{it} \left[C_t (\sum_{i=1}^{I_t} b_{it} p_{it}^{1-\sigma})^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} b_{it} p_{it}^{-\sigma} \right]}{C_t (\sum_{i=1}^{I_t} b_{it} p_{it}^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{I_t} b_{it} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma} = \left(\frac{E_t}{C_t} \right)^{\sigma-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}.
\end{aligned}$$

したがって、

$$s_{it} = \left(\frac{E_t}{C_t} \right)^{\sigma-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}.$$

ここで $C_t = 1$ とすると、

$$E_t = s_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}} b_{it}^{\frac{1}{1-\sigma}} p_{it}$$

比較時点と基準時点との対数差分をとると、

$$\Delta \ln E_t = \frac{1}{\sigma-1} \Delta \ln s_{it} + \frac{1}{1-\sigma} \Delta \ln b_{it} + \Delta \ln p_{it}$$

ここで、

$$w_{it} \equiv \frac{\Delta s_{it} / \Delta \ln s_{it}}{\sum_{i=1}^{I_t} (\Delta s_{it} / \Delta \ln s_{it})}$$

と定義すると、

$$\sum_{i=1}^{I_t} w_{it} = 1.$$

このウェイトを用いて加重平均をとると

$$\Delta \ln E_t = \frac{1}{\sigma-1} \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln s_{it} + \frac{1}{1-\sigma} \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln b_{it} + \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln p_{it}.$$

$\sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln s_{it} = 0$ であることに注意して、これを支出関数に戻すとCOLIを得ることが可能であり、基準時点を $t-y$ 期、比較時点を t 期とすると、

$$\frac{E_t}{E_{t-y}} = \left[\prod_{i=1}^{I_t} \left(\frac{b_{it}}{b_{i,t-y}} \right)^{w_{it}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \times \left[\prod_{i=1}^{I_t} \left(\frac{p_{it}}{p_{i,t-y}} \right)^{w_{it}} \right].$$

観察される消費量に、CES型の需要関数で定まる数量に加えて、さらに他の要因が含まれるとしよう⁵。さらに、 $t-1$ 期の数量にはエラーはないが、 t 期の数量にはエラーがあるとする。すなわち、観察された消費量 \tilde{x}_{it} には ε_{it} というノイズが含まれており、 $\tilde{x}_{it} = (1 + \varepsilon_{it})x_{it}$ 、 $E(\varepsilon_{it}) = 0$ と仮定する。すると、支出シェアは下記のようになる。

$$s_{it} = \left(\frac{E_t}{C_t} \right)^{\sigma-1} b_{it} p^{1-\sigma} (1 + \varepsilon_{it})$$

このとき、

$$\Delta \ln E_t = \frac{1}{\sigma-1} \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln(1 + \varepsilon_{it}) + \frac{1}{1-\sigma} \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln b_{it} + \sum_{i=1}^{I_t} w_{it} \Delta \ln p_{it}$$

となり、右辺第1項はゼロにならない⁶。このとき、たとえ b_{it} が時間を通じて一定でも、Sato-Vartia指数は需要弾力性 σ に依存してしまう。

[2] Feenstra 型 COLI の性質

財のうち、基準時点(t)と比較時点($t-y$)の二時点で同時に存在する商品の集合を $\theta_{t,t-y}$ 、比較時点における全商品の集合を θ_t 、基準時点における全商品の集合を θ_{t-y} とする。CES型の効用関数を仮定する。

t 期と $t-y$ 期の二時点で存在する商品に限定したCOLIを $P(p_t, p_{t-y}, q_t, q_{t-y}, \theta_{t,t-y})$ とすると、FeenstraのCOLIは下記のように定義される。

$$P(p_t, p_{t-y}, q_t, q_{t-y}, \theta_{t,t-y}) \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-y}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}},$$

⁵ データのエラーや特売による急激な増加、あるいは店舗で売り切れてしまった場合など。

⁶ w_{it} に含まれる (Δs_{it}) は ε_{it} と相関を持つことに注意せよ。

$$\lambda_t = \frac{\sum_{i \in \theta_{t,t-y}} p_{it} x_{it}}{\sum_{i \in \theta_t} p_{it} x_{it}}$$

λ_t は支出総額に占める継続商品への支出割合である。新商品割合が増加すると λ_t が低下し、COLIもまた低下する。これは、財のバラエティが増えることで効用が増加し、特定の効用水準を実現するために必要な費用が低下するためである。バラエティのCOLIに与える影響は λ -Ratio、すなわち λ_t/λ_{t-y} の $1/(\sigma - 1)$ 乗となっている。累乗の分母が $\sigma - 1$ であるため、代替の弾力性が1に近づくとつれバラエティ効果は非常に大きくなり、1のときに無限大となる。これは、CESという効用関数の形状からくる性質である。CES型効用関数は、

$$u = \left(\sum_{i=1}^I a_{it} x_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

であり、もしもすべての財の数量を細かく分割可能で、財の総量 X を $x \times I$ で均等分割可能とすると、 x に分割した場合の効用は、 $a_{it} = 1$ であれば、

$$u = \left(\sum_{i=1}^I \left(\frac{X}{I} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left(I^{\frac{1}{\sigma}} \times X^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = I^{\frac{1}{1-\sigma}} \times X,$$

であり、効用水準のバラエティ弾力性は σ が1に近づくと無限に発散していく。また、効用関数は凹関数になっており、各財の限界効用は、消費量をゼロに近づけると無限に発散していく。これは、消費のライフサイクルモデルにおいて異時点間の消費平滑化が望ましいのと同じメカニズムであり、一種類の消費財100単位よりも、50単位の消費財二種類のほうが効用は高くなり、さらに1単位の100種類の財であればさらに効用は高くなっていくことを意味する。 σ が1に近づくと、 x の累乗はゼロになっていく。これは、効用関数がより強い凹関数になっていくことを意味する。効用が財の増加関数であり、かつ、財の分割から得られる利益を最大になるのは、 x の累乗が右から0に近づくと、すなわち、 σ が右から1に近づくとときであり、このとき、わずかな財の分割は巨大な効用の増加をもたらすのである。

[3] Feenstra 流弾力性(弾力性(1))

CES型効用関数の下では、財 i の品目内のシェアは下記で与えられる。

$$s_{it} = (E_t)^{\sigma-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}$$

対数をとって、一階の階差をとると。

$$\Delta \ln s_{i,t} = (\sigma - 1) \Delta \ln E_t - (\sigma - 1) \Delta \ln p_{i,t} + \Delta \ln b_{it}$$

$$= \phi_t - (\sigma - 1) \Delta \ln p_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$$

ただし、 $\phi_t = (\sigma - 1) \Delta \ln E_t$, $\varepsilon_{i,t} = \Delta \ln b_{i,t}$ 。

つぎに、下記のような供給関数を考える。

$$\Delta \ln p_{i,t} = \omega \Delta \ln x_{i,t} + \xi_{i,t}$$

これを需要方程式に代入する。 $x = sE/p$ だから、

$$\Delta \ln x_{i,t} = \Delta \ln s_{i,t} + \Delta \ln E_t - \Delta \ln p_{i,t}$$

整理すると下記を得ることができる。

$$\Delta \ln p_{i,t} = \left(\frac{\omega}{1 + \sigma\omega} \right) (\phi_t + \Delta \ln E_t) + \left(\frac{\omega}{1 + \sigma\omega} \right) \left(\frac{1}{\omega} \xi_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \right)$$

ここで、

$$\rho = \omega(\sigma - 1)/(1 + \sigma\omega), \delta_{i,t} = \xi_{i,t}/(1 + \sigma\omega)$$

とすると、

$$\Delta \ln p_{i,t} = \left(\frac{\omega}{1 + \sigma\omega} \right) (\phi_t + \Delta \ln E_t) + \frac{\rho}{(\sigma - 1)} \varepsilon_{i,t} + \delta_{i,t}$$

需要、供給いずれにおいても同一品目内の他の商品との乖離をとり、その残差をとると、右辺第一項を消去することが出来る。すなわち、

$$\tilde{\varepsilon}_{it} = \varepsilon_{it} - \varepsilon_{it-1} = (\Delta \ln s_{it} - \Delta \ln s_{kt}) + (\sigma - 1)(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})$$

$$\tilde{\delta}_{it} = \delta_{it} - \delta_{kt} = (\sigma - 1)(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \frac{\rho}{(\sigma - 1)} (\varepsilon_{it} - \varepsilon_{kt}) - \frac{\rho}{(\sigma - 1)} (\varepsilon_{it} - \varepsilon_{kt})$$

$$= (1 - \rho)(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \frac{\rho}{(\sigma - 1)} (\Delta \ln s_{it} - \Delta \ln s_{kt})$$

整理すると、

$$\tilde{\varepsilon}_{it} = (\Delta \ln s_{it} - \Delta \ln s_{kt}) + (\sigma - 1)(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})$$

$$\tilde{\delta}_{it} = (1 - \rho)(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \frac{\rho}{(\sigma - 1)}(\Delta \ln s_{it} - \Delta \ln s_{kt})$$

ここで、 $\tilde{\varepsilon}_{it}$ と $\tilde{\delta}_{it}$ が直交していると仮定すると、両式を乗じ、

$$(\Delta \ln s_{i,t} - \Delta \ln s_{k,t})^2 = X_{1it},$$

$$(\Delta \ln s_{i,t} - \Delta \ln s_{k,t})(\Delta \ln p_{i,t} - \Delta \ln p_{k,t}) = X_{2it}$$

$$(\Delta \ln p_{i,t} - \Delta \ln p_{k,t})^2 = Y_{it},$$

とおくと、

$$\tilde{\varepsilon}_{it} \tilde{\delta}_{it} = -\frac{\rho}{(\sigma - 1)}(\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})X_{1it} + (\sigma - 1(1 - \rho)Y_{it}) + (-\rho + (1 - \rho))X_{2it}$$

$E(\tilde{\varepsilon}_{it} \tilde{\delta}_{it}) = 0$ の仮定より、 ρ と σ を推計することが可能である。具体的には、時間に関して平均をとり、

$$\bar{Y}_i = \frac{\rho}{(1 - \rho)(\sigma - 1)^2} \bar{X}_{1i} + \frac{1 - 2\rho}{(1 - \rho)(\sigma - 1)} \bar{X}_{2i} + \bar{u}_i$$

を用い推計する。Broda and Weinstein (2010)やHottman (2014)はアメリカのスキャナーデータを用い、加重非線形最小二乗法(GMM)を用いて推計している。なお、弾力性が1のときにはこのモデルの推定は不可能であることに注意する必要がある⁷。

実際に $\Delta \ln s_{i,t} - \Delta \ln s_{k,t}$ を計算する際には、基準となる商品kを選択する必要がある。Feenstra(1994)では、kは国であり、その選択に大きな問題はない。Broda and Weinstein (2010)では、最大売り上げをもつ商品をkとしている。その場合、kの選択により結果が変わる可能性がある。本稿では、最大売り上げ商品からの差分ではなく、平均値からの乖離を用いる。すなわち、

⁷ 本稿では、加重行列として、各財の支出額を用いている。具体的には、(31)式の各変数に、商品iの販売合計額を乗じた式をOLS推計し、販売期間が長く、販売金額の大きい商品により大きなウェイトを与えている。なお、Hottman(2014)においても、販売期間の長い商品により大きなウェイトが附されている。

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{it} &= \left(\Delta \ln s_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln s_{kt} \right) + (\sigma - 1) \left(\Delta \ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{kt} \right) \\ \tilde{\delta}_{it} &= (1 - \rho) \left(\Delta \ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{kt} \right) - \frac{\rho}{(\sigma - 1)} \left(\Delta \ln s_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln s_{kt} \right)\end{aligned}$$

を用いる⁸。ただし、 n は財の種類数である。このように、シェアと価格のWithin Variationに基づく弾力性の推定値を本稿では弾力性(1)と呼ぶことにする。

[4] 数量を用いる弾力性の推計(弾力性(2))

需要、供給いずれに対しても数量と価格の関係式として、

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{it} &= \left(\Delta \ln x_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln x_{kt} \right) + \sigma \left(\Delta \ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{kt} \right) \\ \tilde{\xi}_{it} &= \left(\Delta \ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{kt} \right) - \omega \left(\Delta \ln x_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln x_{kt} \right)\end{aligned}$$

を用いて弾力性を推計する。このとき、 $E\left(\tilde{\varepsilon}_{it}\tilde{\xi}_{it}\right) = 0$ の仮定より、

$$\begin{aligned}\left(\Delta \ln x_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln x_{k,t} \right)^2 &= X_{1it}, \\ \left(\Delta \ln x_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln x_{k,t} \right) \left(\Delta \ln p_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{k,t} \right) &= X_{2it},\end{aligned}$$

⁸ このままだと、各 i に対し、 i を除いた平均を計算する必要があるが、ここで、 $\overline{\Delta \ln s_{k,t}} = \frac{1}{n} \sum_k \Delta \ln s_{k,t}$ とする
と、

$$\sum_{k \neq i} \Delta \ln s_{k,t} = \frac{n}{n-1} \overline{\Delta \ln s_{k,t}} - \frac{1}{n-1} \Delta \ln s_{i,t}$$

であり、いったん $\overline{\Delta \ln s_{k,t}}$ を計算すれば、あとは簡単な操作で $\sum_{k \neq i} \Delta \ln s_{k,t}$ を得ることが可能である。

$$\left(\Delta \ln p_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln p_{k,t} \right)^2 = Y_{it}$$

とすると、

$$\widetilde{\varepsilon}_{it} \widetilde{\xi}_{it} = -\omega X_{1it} + \sigma Y_{it} + (1 - \sigma \omega) X_{2it}$$

を得る。このMoment条件から各弾力性を推計することが可能である。

[5] 財間(Between)の情報を用いた弾力性の推計(弾力性(3))

一般的なケースのCES型効用関数に対応する需要関数は下記で与えられる。

$$x_i = \frac{a_i^\sigma}{a_k^\sigma} \left(\frac{p_i}{p_k} \right)^{-\sigma} x_k$$

これは、財価格がi財とk財で等しい場合、財のシェアは外生的に a_i と a_k で決定されることを意味している。これは、同じコーヒーの価格であっても、財iが500グラム、財kが100グラムのコーヒーである場合、及び品質の差がある場合に対応している。しかし、ここで、強い仮定ではあるが、財の間の差異は容量のみであり、同一容量で基準化した場合、同一価格であれば同一の需要量になる、すなわち、

$$x_i = \left(\frac{p_i}{p_k} \right)^{-\sigma} x_k$$

が成立していると仮定する。これは、財の間の品質の差を無視していること、しかしながら二つの財は完全代替ではないことを意味している。この場合、対数をとって

$$\ln x_i = -\sigma (\ln p_i - \ln p_k) + \ln x_k$$

商品kではなく、平均からの乖離をとると、弾力性(1)および(2)と同様に、

$$\ln x_i - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln x_k = -\sigma \left(\ln p_i - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln p_k \right)$$

とせねばならない。

Feenstra(1994)と同様に、供給側も考え同時方程式とする。ただし、これまでと違い、各商品に関し

て対数階差をとっておらず、商品間の価格の比較になっていることに注意する必要がある。

$$\tilde{\varepsilon}_{it} = \left(\ln x_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln x_{kt} \right) + \sigma \left(\ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln p_{kt} \right)$$

$$\tilde{\xi}_{it} = \left(\ln p_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln p_{kt} \right) - \omega \left(\ln x_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \Delta \ln x_{kt} \right)$$

ここで、変数を変換して平均値を落とし、これまで同様に $\tilde{\varepsilon}_{it}$ と $\tilde{\xi}_{it}$ の直交条件を用いる。

$$\left(\ln x_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln x_{k,t} \right)^2 = Z_{1it},$$

$$\left(\ln x_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln x_{k,t} \right) \left(\ln p_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln p_{k,t} \right) = Z_{2it},$$

$$\left(\ln p_{i,t} - \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i} \ln p_{k,t} \right)^2 = W_{it}$$

とすると、

$$\tilde{\varepsilon}_{it} \tilde{\xi}_{it} = -\omega Z_{1it} + \sigma W_{it} + (1 - \sigma\omega) Z_{2it}$$

この期待値がゼロであるというMoment条件を用い、これまで同様に弾力性を推計することが可能である。

[6] Balk の弾力性(弾力性(4))

Balk (2000)は、まずCES型の商品空間を継続商品に限定し、支出関数

$$E(p_t, b, 1) = \left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

を用いて、COLIを

$$COLI = \frac{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

と定義する。次に、 i 財のシェアが

$$w_t^i \equiv \frac{p_{it} x_{it}}{E_t} = \left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)^{-1} b_i p_{it}^{1-\sigma}$$

であることを利用する。COLIの分母と分子に $\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$ を乗じると

$$\begin{aligned} COLI &= \frac{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^I w_{it-y}^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

となり、Laspeyres-Konüs型のCOLIとなる。また、分母と分子に $\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$ を乗じると

$$\begin{aligned} COLI &= \frac{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it-y}^{1-\sigma}\right)\left(\sum_{i=1}^I b_i p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^I w_t^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}}\right)^{-(1-\sigma)}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

となり、Paasche-Konüs型のCOLIとなる。

無論、CES型の効用関数の場合は、両者は一致するので、

$$\left(\sum_{i=1}^I w_t^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}}\right)^{-(1-\sigma)}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left(\sum_{i=1}^I w_{it-y}^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

が成立せねばならない。これは、 σ と価格比、および二期間のシェアの間で常に成立せねばならない

関係式であり、もしもシェアと価格比の情報が利用可能であれば、そこから σ を推計することが可能となる。これは、財の価格に関してはWithinを、シェアに関してはBetweenの情報を用いており、供給側の推計は行っていないものの、弾力性(1)-(2)と(3)の中間に位置するものと思われる。通常は、Laspeyres型はPaasche型よりも大きくなることが想定される。すなわち、

$$\sum_{i=1}^I w_t^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}} \right) < \sum_{i=1}^I w_{t-y}^i \left(\frac{p_{it}}{p_{it-y}} \right)$$

が成立するが、Balk型弾力性は、このPaascheギャップを埋めるように、非線形パラメター σ を求めていると考えることも可能である。

[7] データ

本研究では、株式会社インテージによる店舗に基づくPOSデータ(SRI)を利用し、様々な指数および弾力性の推計を試みる。SRIは日本全国のGMS(General Merchandise Store)、スーパーマーケット、ドラッグストア、コンビニエンスストア、ホームセンター等の小売店約3,800店舗で記録された販売データである。店舗の標本は1年間で7%程度が入れ替えられるため、毎週の店舗数に多少の変動がある。本研究では販売カテゴリー数、カテゴリー内の商品数の多いGMS、スーパーマーケットについて検討を行う。通時の平均店舗数はGMSで214店、スーパーマーケットで1,050店である。

販売データは月曜日から日曜日を1週間とする週次の集計値を用いている。データ期間は2007年1月第1週から、2015年8月第1週までの449週間である。1週間に記録される商品数(同じ商品でも違う店舗で販売されたものは違う商品としてカウントしている)の通時平均記録数はGMSで約200万点、スーパーマーケットでは約400万点に及ぶ。SRIではカバーしている商品(加工食品、日用品、医薬品等)を1,744の詳細な品目に分類している。次節ではこの品目のうち、前節の4つの手法で弾力性が推計できた品目(GMSで615品目、スーパーマーケットで623品目)に絞って実証分析を行う。このようなカテゴリーの絞り込みによって実証分析に用いるデータの売上高、記録商品数はGMSでSRI全体の50%弱、スーパーマーケットで50%強となる。表1にSRIデータ及び、本稿の実証研究に用いるデータの記述統計を示す。

表 1: SRI データの記述統計

SRI Total									
	支出額 (千円)		商品数		カテゴリー数		店舗数		
	GMS	SMT	GMS	SMT	GMS	SMT	GMS	SMT	
平均	5,400,673	7,606,117	1,979,802	4,130,098	1,521	1,511	214	1,050	
標準偏差	369,382	449,596	176,198	277,561	12.4	10.9	6.2	29.2	
最大値	7,312,957	9,262,051	2,389,888	4,905,366	1,554	1,533	233	1,134	
中央値	5,369,341	7,563,274	1,975,737	4,011,490	1,523	1,512	216	1,040	
最小値	4,509,567	5,557,045	1,710,647	3,547,969	1,490	1,485	199	997	

SRI COLI Data									
	支出額 (千円)		商品数		カテゴリー数		店舗数		
	GMS	SMT	GMS	SMT	GMS	SMT	GMS	SMT	
平均	2,637,777	4,207,336	940,438	2,210,606	615	623	214	1,050	
標準偏差	163,968	231,199	96,368	167,713	1.7	1.5	6.2	29.2	
最大値	3,452,579	5,056,480	1,146,242	2,670,986	617	625	233	1,134	
中央値	2,627,662	4,185,171	936,700	2,140,072	615	624	216	1,040	
最小値	2,254,981	3,128,001	801,324	1,866,813	609	620	199	997	

注) Sample Period = Jan 1st week, 2007 to Aug 1st week, 2015.

GMS: General Merchandise Store, SMT: Supermarket

対象商品は、JANコードが附された加工食料品、日用品、化粧品、医薬品であり、生鮮食料品や耐久消費財は含まれていない。

表2は、代替の弾力性の推計及び価格指数の計算に用いるデータのパネル記述統計(GMS)を示している。449週間のデータであるが、商品の平均的な存続期間は68週であることがわかる。標本は継続商品に限定しているが、継続商品のリストは毎週変わるためパネル数は300万を超えている。価格は最小値が4円、最大値が50,000円であり、特売を含む幅広い価格帯の商品が取られている。価格変化率(対数差分)の標準偏差はWithinとBetweenでほぼ近い値となっている一方で、数量変化率(対数差分)の標準偏差はWithinがBetweenを大きく上回る。同じ店舗、同じ商品でも週によって特売や季節性等によって販売数量が大きく変動していることが読み取れる。

表 2: COLI 及び価格指数計算に用いる SRI データのパネル記述統計 (GMS)

変数		平均	標準偏差	Min	Max	観測数
支出額	overall	3,331	9,888	4	2,191,610	N = 211,746,679
	between		6,111	9	947,523	n = 3,100,823
	within		4,980	-732064	1,619,981	T-bar = 68.2873
数量	overall	16.6	55.7	1	9,696	N = 211,746,679
	between		36.0	1	6,596	n = 3,100,823
	within		27.8	-4,910	8,170	T-bar = 68.2873
価格	overall	290.121	335.1	4	50,000	N = 211,746,679
	between		450.0	5	50,000	n = 3,100,823
	within		26.5	-4665	4,814	T-bar = 68.2873
価格変化率 (対数差分)	overall	-0.005	0.111	-2.552	2.303	N = 211,746,679
	between		0.104	-1.551	2.303	n = 3,100,823
	within		0.105	-2.694	2.041	T-bar = 68.2873
数量変化率 (対数差分)	overall	-0.044	0.884	-8.201	7.752	N = 211,746,679
	between		0.488	-7.163	6.265	n = 3,100,823
	within		0.859	-8.286	9.142	T-bar = 68.2873
支出額変化率 (対数差分)	overall	-0.049	0.854	-8.322	7.988	N = 211,746,679
	between		0.469	-7.185	6.089	n = 3,100,823
	within		0.830	-8.416	8.351	T-bar = 68.2873
支出額シェア 変化率 (対数差分)	overall	0.000	0.849	-7.723	7.787	N = 211,746,679
	between		0.461	-6.804	6.086	n = 3,100,823
	within		0.826	-8.134	8.464	T-bar = 68.2873

[8] スーパーと GMS 両方を含む弾力性推定結果表

表 3: 弾力性推計値

Summary of Statistics: Estimated Elasticity of Substitution

	弾力性1(OLS)	弾力性2(OLS)	弾力性3(OLS)	弾力性1(WLS)	弾力性2(WLS)	弾力性3(WLS)	弾力性4(Balk)
	sig1_2b_ols	sig2_2b_ols	sig3_2b_ols	sig1_2b_wls	sig2_2b_wls	sig2_3b_wls	Balk's sig
GMS							
count	669	669	669	669	669	669	669
mean	16.358	11.655	3.294	50.519	25.465	6.699	2.355
sd	24.925	14.598	18.376	656.555	379.702	33.428	8.503
min	3.720	2.902	-260.528	2.933	1.479	-206.323	-181.851
p1	4.328	3.545	0.331	3.465	2.682	-0.940	-1.401
p5	5.670	4.627	1.187	4.061	3.230	1.050	0.000
p10	6.434	5.247	1.425	4.453	3.613	1.490	1.000
p25	7.809	6.149	2.202	4.997	4.204	2.246	1.813
p50	10.473	8.047	3.149	6.025	5.069	3.439	2.670
p75	16.560	11.771	4.744	8.904	6.795	5.123	3.397
p90	27.854	18.982	7.284	16.005	10.825	9.082	4.072
p95	39.865	28.221	10.029	30.088	17.970	15.484	4.466
p95	114.390	82.344	23.830	234.473	150.536	66.767	6.256
max	439.489	221.126	191.807	12,361.040	9,721.833	578.968	97.289
Super Market							
count	676	676	676	676	676	676	676
mean	15.832	11.665	10.017	14.025	9.543	8.650	2.313
sd	17.422	13.782	118.150	46.319	37.872	58.619	1.415
min	3.652	2.409	-47.088	2.910	1.162	-252.616	-4.809
p1	4.845	3.606	0.433	3.572	2.685	0.255	-0.701
p5	6.474	5.117	1.195	4.175	3.340	1.152	0.000
p10	7.198	5.673	1.539	4.562	3.754	1.601	0.666
p25	8.806	6.714	2.246	5.263	4.378	2.374	1.482
p50	11.551	8.557	3.228	6.388	5.134	3.482	2.456
p75	17.140	11.929	4.748	9.851	6.887	5.217	3.075
p90	25.072	18.435	7.283	18.117	10.409	8.777	3.711
p95	36.112	26.618	11.281	31.765	16.426	14.598	4.102
p95	86.389	58.265	32.375	137.495	63.388	56.632	5.754
max	264.454	212.304	2,989.236	664.515	635.192	1,146.172	15.979
Total							
count	1345	1345	1345	1345	1345	1345	1345
mean	16.093	11.660	6.673	32.177	17.462	7.680	2.334
sd	21.478	14.188	84.794	464.392	269.149	47.772	6.078
min	3.652	2.409	-260.528	2.910	1.162	-252.616	-181.851
p1	4.646	3.591	0.421	3.484	2.685	0.255	-0.907
p5	5.990	4.876	1.195	4.131	3.283	1.087	0.000
p10	6.813	5.415	1.496	4.475	3.667	1.514	0.875
p25	8.282	6.466	2.221	5.152	4.279	2.300	1.649
p50	11.049	8.287	3.203	6.208	5.116	3.461	2.544
p75	16.788	11.860	4.744	9.449	6.864	5.164	3.234
p90	26.087	18.711	7.283	17.507	10.562	8.945	3.865
p95	38.746	27.464	10.782	31.386	17.176	15.147	4.306
p95	91.945	73.708	28.586	178.022	93.197	56.632	5.781
max	439.489	221.126	2,989.236	12,361.040	9,721.833	1,146.172	97.289

注) いずれも、月次で集計し、前年同月からの乖離を用いた推計

弾力性1: 売上シェアと価格の変化率、弾力性2:数量と価格の変化率、弾力性3:容量単価を用いたBetween推計、弾力性4:Balk (1999)に従う弾力性

WLS: 売上により各財にウェイトをつけたWeighted Least Squares

OLS: Ordinary Least Squares

表 4: 推計方法別弾力性間の相関行列

	弾力性1(OLS)	弾力性2(OLS)	弾力性3(OLS)	弾力性1(WLS)	弾力性2(WLS)	弾力性3(WLS)	弾力性4(Balk)
GMS							
弾力性1(OLS)	1.0000						
弾力性2(OLS)	0.8148*	1.0000					
弾力性3(OLS)	0.0040*	0.0002	1.0000				
弾力性1(WLS)	0.2841*	0.4516*	0.0000	1.0000			
弾力性2(WLS)	0.3621*	0.5812*	0.0014	0.8142*	1.0000		
弾力性3(WLS)	0.0512*	0.0667*	0.1193*	0.0024	0.0039*	1.0000	
弾力性4(Balk)	-0.0205*	-0.0262*	0.0151*	-0.0364*	-0.0226*	-0.0034*	1.0000
Super Market							
弾力性1(OLS)	1.0000						
弾力性2(OLS)	0.9700*	1.0000					
弾力性3(OLS)	0.0321*	0.0317*	1.0000				
弾力性1(WLS)	0.5763*	0.6085*	0.0011	1.0000			
弾力性2(WLS)	0.6330*	0.6786*	0.0080*	0.8720*	1.0000		
弾力性3(WLS)	0.0425*	0.0343*	0.8127*	-0.0045*	0.0028*	1.0000	
弾力性4(Balk)	-0.1287*	-0.0619*	0.2037*	-0.0847*	0.0123*	0.1770*	1.0000
Total							
弾力性1(OLS)	1.0000						
弾力性2(OLS)	0.8674*	1.0000					
弾力性3(OLS)	0.0182*	0.0216*	1.0000				
弾力性1(WLS)	0.2556*	0.3561*	-0.0015	1.0000			
弾力性2(WLS)	0.3313*	0.4659*	-0.0002	0.8144*	1.0000		
弾力性3(WLS)	0.0417*	0.0444*	0.7077*	0.0001	0.0016	1.0000	
弾力性4(Balk)	-0.0287*	-0.0258*	0.0353*	-0.0366*	-0.0219*	0.0237*	1.0000

注1) いずれも、月次で集計し、前年同月からの乖離を用いた推計

注2) 弾力性1: 売上シェアと価格の変化率、弾力性2:数量と価格の変化率、弾力性3:容量単価を用いたBetween推計、弾力性4:Balk (1999)に従う弾力性

WLS: 売上により各財にウェイトをつけたWeighted Least Squares

OLS: Ordinary Least Squares

注3) *は5%有意であることを示す

[9] COLI の推定結果

図 1: 弾力性を用いた COLI と Sato-Vartia 型価格指数の比較

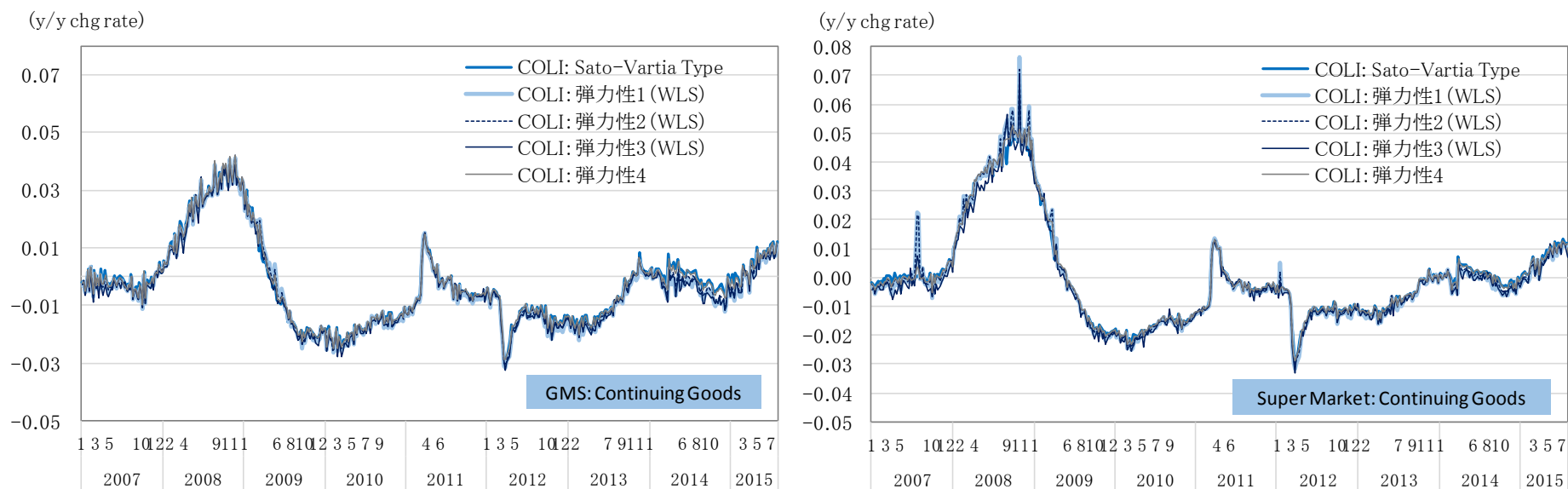


図 2: 商品の変遷を考慮した Feenstra (1994)型の COLI と Sato-Vartia 型価格指数の比較

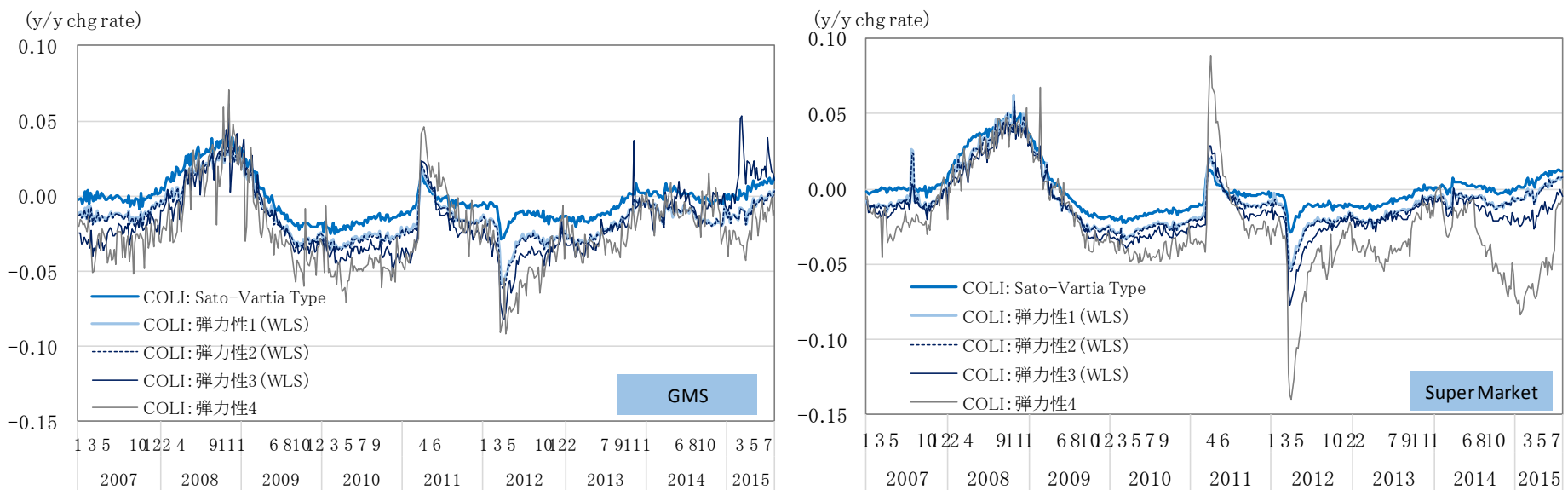


図 3: λ -Ratio と継続商品売上比率

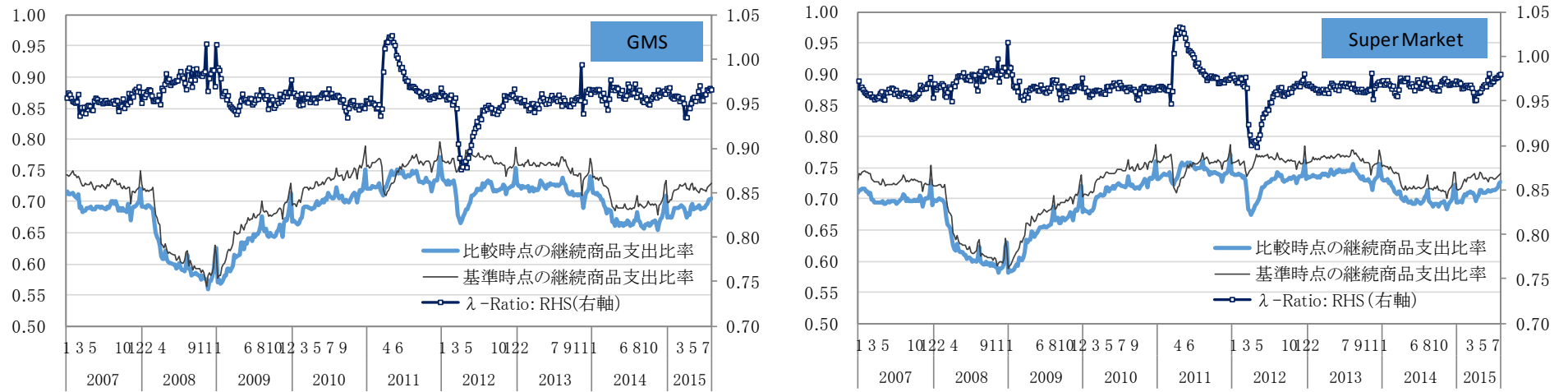
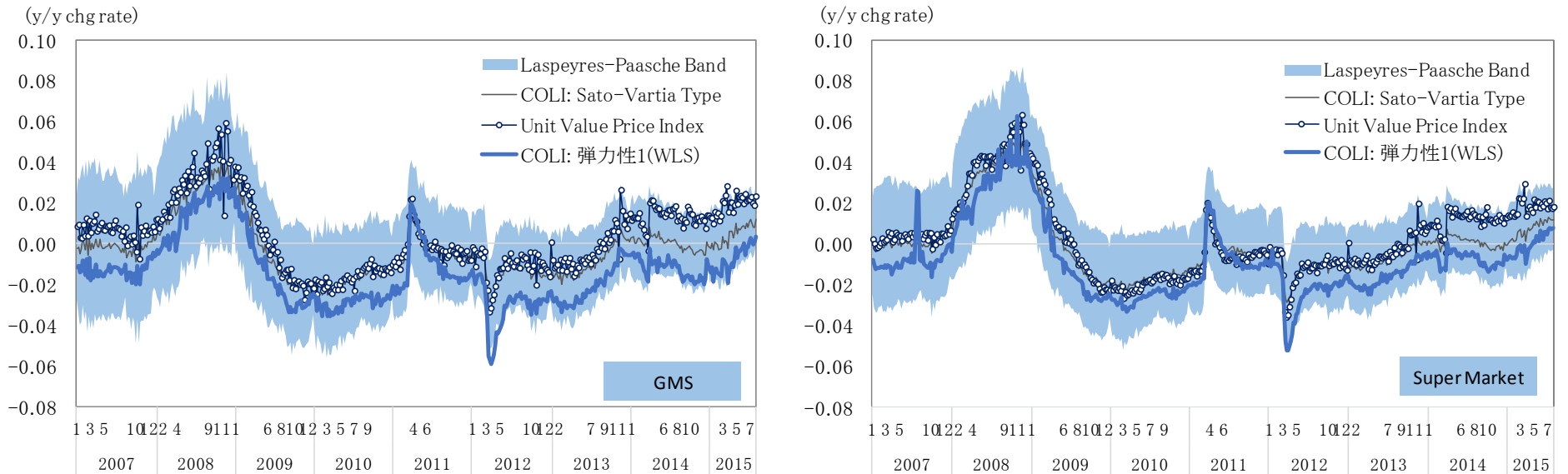


図 4: 容量単価指数とその他 COLI、価格指数の関係



[10] 時差相関表

表 5:物価上昇実感と生計費指数の Cross-Correlation

	std(%)	Cross Correlation between OS Average Inflation Rate with $x(t+h)$									
		$x(t-4)$	$x(t-3)$	$x(t-2)$	$x(t-1)$	$x(t)$	$x(t+1)$	$x(t+2)$	$x(t+3)$	$x(t+4)$	
日本銀行 物価上昇実感 (中央値)	2.997	0.052	0.286	0.598	0.851	1.000	0.851	0.598	0.286	0.052	
CPI (Official)											
総合	0.978	0.284	0.428	0.603	0.719	0.698	0.519	0.180	-0.180	-0.461	
生鮮食料品除く	0.964	0.264	0.420	0.616	0.755	0.732	0.559	0.201	-0.155	-0.425	
帰属家賃と生鮮食料品除く	1.180	0.267	0.417	0.606	0.747	0.718	0.546	0.201	-0.150	-0.412	
SRI Price Indexes(SMT)											
Laspeyres Price Index	2.019	-0.005	0.216	0.473	0.740	0.874	0.857	0.692	0.408	0.125	
Paasche Price Index	1.478	-0.065	0.160	0.442	0.755	0.927	0.875	0.653	0.314	-0.041	
Tornqvist Price Index	1.653	-0.034	0.190	0.466	0.760	0.921	0.888	0.695	0.382	0.061	
Sato-Vartia Price Index	1.645	-0.037	0.187	0.463	0.759	0.921	0.890	0.698	0.386	0.064	
容量単価指数	1.901	0.043	0.260	0.519	0.791	0.938	0.909	0.735	0.429	0.090	
継続商品の単価指数	1.512	0.005	0.224	0.486	0.779	0.924	0.876	0.672	0.345	0.017	
COLI(弾力性1)	1.805	-0.054	0.168	0.426	0.735	0.904	0.873	0.666	0.369	0.053	
COLI(弾力性2)	1.811	-0.052	0.169	0.427	0.732	0.902	0.871	0.667	0.370	0.056	
COLI(弾力性3)	1.915	-0.044	0.164	0.397	0.668	0.828	0.818	0.645	0.369	0.072	
COLI(弾力性4)	2.984	-0.095	0.115	0.298	0.471	0.571	0.589	0.486	0.306	0.114	

注) 影を掛けたセルは相関係数が95%の確率で有意でない。太字は相関係数の絶対値がリード、ラグ期間で最大のものの。

[11] 特売比率の計測方法

t 期における特売比率を B_t とした場合、図 1 における特売比率の算出方法は以下の通りである。

$$B_t = \frac{\sum_{s \in S} \sum_{i \in I} D_{i,s,t} S_{i,s,t}}{\sum_{s \in S} \sum_{i \in I} S_{i,s,t}}$$

ここで、添え字の s は販売店舗、 i は商品の個別銘柄を表し、 $S_{i,s,t}$ を販売額とする⁹。また、 $D_{i,s,t}$ は店舗 s で t 期に販売された商品 i が特売による販売であれば1、そうでなければ0をとる指示関数であり、 $P_{i,s,t}$ をPOS データに収録された販売価格、 $P_{i,s,t}^R$ を仮想的な定価とした場合、以下のように定義する¹⁰。

$$D_{i,s,t} = 1 \text{ if } P_{i,s,t} \leq 0.9P_{i,s,t}^R \\ = 0 \text{ otherwise.}$$

すなわち、定価の10%以下での販売を特売、販売合計額に占める特売による販売額を特売比

⁹ 本稿では、商品銘柄が同一であっても販売店舗が異なれば異なる商品とみなしている。よって、本文中の商品価格 $P_{i,t}$ はここでの $P_{i,s,t}$ と同じことを意味する。

¹⁰ メーカー側が提示する希望小売価格等ではなく、POS データから算出した定価を用いている点で「仮想的」と記している。

率と定義している。定価 $P_{i,s,t}^R$ の算出方法については、ある期間における最頻度を定価とみなす方法が最も簡便な方法であるが、本稿ではこの方法をさらに拡張した Midrigan(2011)の手法に従って定価を算出した。Midrigan(2011)の“Regular Price Algorithm”を要約すると以下の通りである。

1. 各店舗 s の商品 i について、当期 t を含む前後 5 期間(合計 11 期間、これ以降 window と記す)の販売価格から最頻度 $P_{i,s,t}^M$ を計算する。なお、この計算はすべての t について逐次的に行う。
2. 以下の 3 つの条件をすべて満たせば、上記「1」で計算された最頻値を定価とみなす。条件を 1 つでも満たさない場合は、前期($t - 1$)で定義された定価を t における定価とする。
(条件 1) window 内に価格データが 5 つ以上存在すること¹¹
(条件 2) $P_{i,s,t} = P_{i,s,t}^M$ となる期間が window 内の価格データ数 $\times 0.3$ より大きいこと
(条件 3) $P_{i,s,t} = P_{i,s,t}^M$: t における実際の価格が最頻値に等しい
3. 定価の初期値については、「2」を満たす最頻値が存在すればその値を採用する。そうでない場合は、実際の価格 $P_{i,s,t}$ の初期値を定価の初期値として採用する。
4. 最後のステップとして、実際の店舗価格が変化していない隣り合う 2 つの週では、(mode から計算される)定価が変化することを排除する¹²。

[12] 参考文献

- 阿部修人、稲倉典子、遠田敏生、外木暁幸(2015)『POS データからみた生計費指数と物価指数』*RCESR Discussion Paper* 15-6.
- Abe, N., T. Enda, N. Inakura, and A. Tonogi (2015) “Effects of New Goods and Product Turnover on Price Indexes,” *RCESR Discussion Paper* 15-2.
- Abe, N., C. Moriguchi, and N. Inakura (2014) “The Impact of the Great East Japan Earthquake on Commodity Prices: New Evidence from High-Frequency Scanner Data,” *RCPD Working Paper* 12.
- Balk, B.M. (2000) “On Curing the CPI’s Substitution and New Goods Bias,” *Research paper* No. 0005 (Statistics Netherlands, Voorburg).
- Bilbiie, F.O., F. Ghironi, and Melitz, M.J. (2012) “Endogenous Entry, Product Variety, and Business Cycles,” *Journal of Political Economy*, 120(2), 304-345.

¹¹ 商品によっては販売数がゼロの期間もある。よって、window に含まれる価格データの個数は最小の 1 (週分) から最大で 11 (週分) となる。

¹² 詳細については Midrigan(2011)の Supplement の Appendix1 を参照のこと。

- Bils, M. (2009) “Do higher prices for new goods reflect quality growth or inflation?” *Quarterly Journal of Economics*, 124(2), 637-675.
- Boskin, M.J. (Chair), E.R. Dullberger, R.J. Gordon, Z. Griliches, and Jorgenson, D.W. (1996) Final Report of the Commission to Study the Consumer Price Index (Boskin’s report). U.S. Senate, Committee on Finance, Washington DC: US Government Printing Office.
- ✧ Web address: [//www.socialsecurity.gov/history/reports/boskinrpt.html](http://www.socialsecurity.gov/history/reports/boskinrpt.html)
- Broda, C. and Weinstein, D.E. (2010) “Product creation and destruction: evidence and price implications,” *American Economic Review*, 100, 691-723.
- Diewert, W.E. (1992) Essays in Index Number Theory: An Overview of Volume 1. Discussion Paper No.: 92-31, The University of British Columbia, Vancouver
- Diewert, W.E. and von der Lippe, P. (2010) “Notes on unit value index bias,” *Journal of Economics and Statistics*, 230(6), 690-708.
- Fattore, M. (2010) “Axiomatic properties of geo-logarithmic price indices,” *Journal of Econometrics*, 156, 344-353/
- Feenstra, R.C. (1994) “New product varieties and the measurement of international prices,” *American Economic Review*, 84(1), 157-77.
- Feenstra and Reinsdorf (2007) “Should Exact Number have Standard Errors? Theory and Application to Asian Growth,” In *Hard to measure goods and Services: Essays in Honor of Zvi Griliches*, University of Cambridge Press.
- Feenstra, R.C. and Shapiro, M. D. (2003) “High-frequency substitution and the measurement of price indexes,” *Scanner Data and Price Indexes*, University of Chicago Press, 123-150.
- Guadagni, P. M. and J. D. C. Little (1983) “A Logit Mode of Brand Choice Calibrated on Scanner Data,” *Marketing Science*, 2(3), 203-238.
- Haan, J.de and Van der Grient, H.A. (2011) “Eliminating chain drift in price indexes based on scanner data,” *Journal of Econometrics*, 161(1), 36-46.
- Hamano, M. (2013) “On business cycles of product variety and quality.,” *EcoMod2014* 6766.
- Hottman, C. (2014) “Retail Markups, Misallocation, and Store Variety in the US,” mimeo
- Handbury, J. and D. E. Weinstein (2014) “Goods Prices and Availability in Cities,” *The Review of Economic Studies*, 48(10) 1293-1317.
- ILO (2004) Consumer Price Index manual: theory and practice.

- Kehoe, P.J. and V. Midrigan, (2008) "Temporary price changes and the real effects of monetary policy," *Working Papers* 661, Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Klenow, P.J. (2003) "Measuring consumption growth: the impact of new and better products," *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 27(1), 10-23.
- Konüs, A.A. (1939) "The Problem of the True Index of the Cost-of-Living," *Econometrica* 7, no. 1 (January): 1029.
- Melser, D. and Syed, I.A. (2013) "Prices over the product life cycle: Implications for quality-adjustment and the measurement of inflation," *UNSW Australian School of Business Research Paper* No. 2013-26.
- Midrigan, V. (2011) "Menu Costs, Multiproduct Firms, and Aggregate Fluctuations," *Econometrica*, 79, no.4. 1139-1180.
- Reinsdorf, M.B., Dorfman, A.H. (1999) "The Sato-Vartia index and the monotonicity axiom," *Journal of Econometrics*, 90, 45-61
- Silver, M. (2009) "Unit value indices," Chapter 2. In Silver, M. (ed.), *Export and Import Price Index Manual*, IMF: Washington D.C.
- Silver, M. (2010) "The wrongs and rights of unit value indices," *Review of Income and Wealth*, 56, 206-223.